



ELMİ XƏBƏRLƏR

RİYAZİYYAT VƏ TƏBİƏT ELMLƏRİ

№ 2, 2025

©Lənkəran Dövlət Universiteti, 2025

ISSN 2617-8052 (print)
ISSN 2960-1975 (online)

REDAKSIYA HEYƏTİ

1. **İbrahimov Natiq (BAŞ REDAKTOR)**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
2. **Şəmmədov Ramiz (APARICI REDAKTOR)**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
3. **Axundov Ədalət**
Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu, Bakı, Azərbaycan
4. **Eftekharimehrabad Aziz**
Ege Universiteti, İzmir, Türkiyə
5. **Əhmədov Natiq**
Azərbaycan Dövlət İqtisad Universiteti, Bakı, Azərbaycan
6. **Əkpərov Zeynal**
Genetik Ehtiyatlar İnstitutu, Bakı, Azərbaycan
7. **Əliyev Elvin**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
8. **Əliyev Ələkbər**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
9. **Əliyev Nihan**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
10. **Əsgərov İdrak**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
11. **Əzizov Əbdülsəid**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
12. **Hasanov Aknazar Bekdurdievich**
Səmərqənd Dövlət Universiteti, Səmərqənd, Özbəkistan
13. **Hüseynov İsa**
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
14. **İsmayılov Çingiz**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
15. **Qardaşov Rauf**
Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Akademik Həsən Əliyev adına Coğrafiya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan
16. **Qasimov Yusif**
Azərbaycan Universiteti, Bakı, Azərbaycan
17. **Quliyev Əlövsət**
Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Torpaqşünaslıq və Aqrokimya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan
18. **Qurbanov Elşad**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
19. **Manafian Cəlil**
Təbriz Universiteti, Təbriz, İran
20. **Mehdiyev Məhəmməd**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan
21. **Məmmədov Hüseyn**
Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

22. Məmmədov Məmməd

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Torpaqşünaslıq və Aqrokimya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

23. Nuriyev Urfat

Qarabağ Universiteti, Xankəndi, Azərbaycan

24. Reşidoğlu Xanlar

Iğdır Universiteti, Iğdır, Türkiyə

25. Sadenova Marzhan Anuarbekovna

Daulet Serikbayev adına Şərqi Qazaxıstan Texniki Universiteti, Ust- Kamenogorsk, Qazaxıstan

26. Yaqub Qabil

Kafkas Universiteti, Kars, Türkiyə

27. Zeynalov Eldar

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Akademik Murtuza Nağıyev adına Kataliz və Qeyri-üzvi Kimya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

EDITORIAL BOARD

1. **Ibrahimov Natig (EDITOR IN-CHIEF)**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
2. **Shammadov Ramiz (MANAGING EDITOR)**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
3. **Akhundov Adalat**
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, Azerbaijan
4. **Eftekharimehrabad Aziz**
Ege University, Ege, Turkey
5. **Ahmədov Natig**
Azerbaijan State University of Economics, Baku, Azerbaijan
6. **Akparov Zeynal**
Institute of Genetic Resources, Baku, Azerbaijan
7. **Aliyev Elvin**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
8. **Aliyev Alakbar**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
9. **Aliyev Nihan**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
10. **Askerov Idrak**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
11. **Azizov Abdulsaid**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
12. **Hasanov Aknazar Bekdurdievich**
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
13. **Huseynov Isa**
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
14. **Ismayilov Chingiz**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
15. **Gardashov Rauf**
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Geography named after Academician Hasan Aliyev, Baku, Azerbaijan
16. **Gasimov Yusif**
Azerbaijan University, Baku, Azerbaijan
17. **Guliyev Alovzat**
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Soil Science and Agrochemistry
18. **Gurbanov Elshad**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
19. **Manafian Jalil**
Tabriz University, Tabriz, Iran
20. **Mekhdiev Mahammad**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
21. **Mammadov Huseyn**
Baku State University, Baku, Azerbaijan
22. **Mammadov Mammad**
Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Soil Science and Agrochemistry

23. Nuriyev Urfat

Ege University, Izmir, Türkiyə

24. Reshidoghlu Khanlar

Igdir University, Igdir, Türkiyə

25. Sadenova Marzhan Anuarbekovna

East Kazakhstan Technical University named after Daulet Serikbayev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

26. Yagub Gabil

Kafkas University, Kars, Türkiyə

27. Zeynalov Eldar

Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Catalysis and Inorganic Chemistry named after Academician Murtuza Nagiyev, Baku, Azerbaijan

MÜNDƏRİCAT

1. Bəxtiyar Allahverdiyev, Vəfa Yaqubova, Sevinc İbrahimova, Laura Həsənova, Qabil Yusifov	
Yemin tərkibində müxtəlif dozalarda diş ada dovşanlarına verilmiş maqnezium ionlarının və yaşıl yoncanın qanda hemoqlobinin qatılığına və eritrositlərin sayına təsiri.....	7
2. İlhamə Səbzəliyeva, Röya Babayeva	
Parabolik tənliyə cırlaşan sinqulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənlik üçün sonsuz yarımzolaqda qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin asimptotikası.....	14
3. Mətanət Musayeva	
Riyazi modelləşdirmə üsulunun tədris proseslərinə tətbiqi.....	22
4. Габил Ягуб, Натиг Ибрагимов, Туба Улкер	
О существовании решения задачи оптимального управления с граничным функционалом для нелинейного нестационарного уравнения шредингера со специальным градиентным слагаемым	27

YEMİN TƏRKİBİNDƏ MÜXTƏLİF DOZALARDA DİŞİ ADA DOVŞANLARINA VERİLMİŞ MAQNEZİUM İONLARININ VƏ YAŞIL YONCANIN QANDA HEMOQLOBİNİN QATILIĞINA VƏ ERİTROSİTLƏRİN SAYINA TƏSİRİ

Bəxtiyar Allahverdiyev

Vəfa Yaqubova

Sevinc İbrahimova

Laura Həsənova

Qabil Yusifov

Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Akademik Abdulla Qarayev adına Fiziologiya İnstitutu, Bakı, Azərbaycan

Azərbaycan Dövlət Tibb Universiteti, Bakı, Azərbaycan

Bakı Dövlət Universiteti, Bakı, Azərbaycan

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti, Bakı, Azərbaycan

Azərbaycan İdman Akademiyası, Bakı, Azərbaycan

e-mail: baxtallah@mail.ru

e-mail: vefa.yaqubova23@gmail.com

e-mail: sevaibragimova56@gmail.com

e-mail: laural7hasanova@gmail.com

e-mail: qabil.yusifov@sport.edu.az

ORCID: 0009-0004-8392-5814

ORCID: 0009-0004-8513-4149

ORCID: 0009-0005-2603-3534

ORCID: 0000-0003-303852-8946

DOI : 10.30546/2960-1975.2025.2.309

Xülasə. Apardığımız tədqiqatımızın məqsədi müxtəlif miqdarlarda Mg^{2+} ionlarının əlavələrinin yaşıl yonca ilə birlikdə yemə qatılaraq dişə ada dovşanlarına bir ay müddətinə erkək dovşanlarla cütləşməzdən əvvəl verilməsinin onların qanında hemoqlobinin qatılığına və eritrositlərin sayına təsirinin öyrənmək, həmçinin qidaya qatılmış yaşıl yoncanın Mg^{2+} ionlarının toksiki təsirinin nə dərəcədə azatdığını göstərməkdir. Qida tərkibinə Mg^{2+} ionlarının və yaşıl yoncanın müxtəlif miqdarları əlavə edilmişdir. (50, 60, 70 mqk Mg^{2+} və 50, 60, 70 q yaşıl yonca). Müəyyən olunmuşdur ki, Mg^{2+} ionlarının verilməsi nəticəsində qanda hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı intakt heyvanların eyni göstəriciləri ilə müqayisədə yaxınlaşır. Heyvanların qidasına Mg^{2+} ionlarının və yaşıl yoncanın müxtəlif dozalarının eyni zamanda qatılaraq verilməsi qanda hemoqlobinin qatılığını və eritrositlərin sayını çoxaldır.

Kontrol heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı (127.5 q/l ; 4.13 mil.), 1 ay ərzində sutkada 50 mqk Mg^{2+} verilmiş heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı müvafiq olaraq (118.5 q/l ; 3.25 mil.), 70 mqk Mg almış heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı (121.5 q/l ; 3.63 mil.) olmuşdur. 1 ay ərzində sutkada yem paylarına 50 mqk Mg^{2+} və 50 qr yaşıl yonca əlavə edilmiş heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı intakt heyvanlarla müqayisədə (132.5 q/l ; 4.65 mil.), qida paylarına 70 mqk Mg^{2+} və 70 qr yaşıl yonca əlavə edilmiş heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı (158.5 q/l ; 6.91 mil.) artmışdır.

Aldığımız nəticələr göstərir ki, Mg^{2+} ionlarının dozalarından asılı olaraq orqanizmdə baş verən toksiki dəyişikliklər bir-birindən fərqlənir, qida paylarına Mg^{2+} ionları ilə birlikdə verilmiş yaşıl yonca Mg^{2+} ionları toksiki təsirini azaldır.

Açar sözlər: Mg^{2+} ionları, yaşıl yonca, hemoqlobinin, eritrosit, ada dovşanı, qida

Giriş

Yer kürəsində əhalinin sayının sürətlə artması heyvan mənşəli qida növlərinə tələbatı kəskin sürətdə artırdığına görə reproduktiv funksiyaları gücləndirən hər bir üsula maraq artmışdır və buna görə bioloji aktiv maddələrin, mikroelementlərin bu məqsədlə istifadəsi olduqca aktualdır. Mineral maddələr o cümlədən mikroelementlərdən səmərəli istifadə etmək üçün müxtəlif qrup heyvanların onlara tələbatını, yemlərin tərkibində həmin maddələrin miqdarını,

müxtəlif heyvan növləri üçün yem paylarına mikroelementlərin hansı üsul və normalarla əlavə etmək lazım olduğunu bilmək çox vacibdir. Hər bir orqanizmin normal böyüməsi və inkişafı üçün həmin orqanizm mütəmadi olaraq lazımı miqdarda mineral maddələr və mikroelementlər almalıdır.

Makro və mikro elementlər fermentlərin aktiv mərkəzlərində yerləşərək orqanizmdə maddələr mübadiləsinin gedişinə güclü təsir göstərir. Yemin kəmiyyət və keyfiyyətindən, ümumi enerji tutumundan asılı olaraq orqanizmin fizioloji durumu dəyişir [15]. Yemin keyfiyyətinin dəyişməsi prenatal və postnatal dövrlərdə orqan və sistemlərin struktur və funksional xarakteristikasına təsir edir [17].

Bir çox fermentlərin aktiv mərkəzlərində yerləşən mikroelementlərin cüzi dozalarda qidaya qatılaraq verilməsi orqanizmdə maddələr mübadiləsinə sürətləndirir [4; 7; 8; 10; 11; 14]. Bunun nəticəsində qanda hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı dəyişir və bu da reproduktiv funksiyalara təsir edir [6; 9].

Qan toxuması digər toxuma və orqanlarla təmasda olduğuna görə bu orqanlarda baş verən dəyişikliklər qana təsir edir və onun tərkibi (həm formalı elementlər, həm də hemoqlobinin və plazman) dəyişir [18]. Mineral maddələrdən, o cümlədən mikroelementlərdən səmərəli istifadə etmək üçün müxtəlif qrup heyvanların onlara tələbatını, yemlərin tərkibində həmin maddələrin miqdarını, müxtəlif heyvanların yem paylarına mikroelementlərin hansı üsul və normalarla əlavə etmək lazım olduğunu bilmək çox vacibdir. Endogen və ekzogen faktorlar heyvan orqanizmində güclü təsirə malik olduqlarına görə onlardan biri olan əvəzolunmaz metionin amin turşusunun müxtəlif dozalarda qida tərkibinə qatılaraq verilməsi onların orqanizminin inkişafını sürətləndirir [5; 16; 17; 19].

Bu elmi tədqiqat işini aparmaqda məqsədimiz Mg^{2+} ionlarının qida tərkibində böyük miqdarda verilməsinin qanda hemoqlobinin qatılığa və eritrositlərin sayına təsirini öyrənmək və həmçinin qidaya qatılmış yaşıl yoncanın Mg^{2+} ionlarının toksiki təsirinin nə dərəcədə azaldığını göstərmək və təsir qabiliyyətinin izlənilməsidir. Əlavələrinin kiçik dozalarının yem paylarına qatılaraq cütləşməzdən bir ay öncədən dişi ada dovşanlarına (Leporidae) verilməsi nəticəsində onların qanında eritrositlərin və leykositlərin sayının və həmçinin reproduktiv funksiyalarının dəyişməsini öyrənməkdir ki, buda çox aktual bir problemdir, çünki qanda hemoqlobinin hansı təsirdən dəyişmə səbəbini, eləcə də orqanizmin immun sisteminin hansı fizioloji vəziyyətdə olduğunu aydınlaşdırma bilirik.

Material və metodlar

Təcrübələrdə 23 baş dişi ada dovşanlarından istifadə olunmuşdur. Heyvanlar iki qrupa ayrılmışdır: 1) İntakt heyvanlar - 5 baş; 2) Təcrübə heyvanları. Təcrübə heyvanları da 3 qrupa ayrılmışdır: Qida tərkibinə 50, 60, 70 mqk Mg^{2+} ionları və 50, 60, 70 q yaşıl yonca əlavə edilərək 1 ay müddətinə yedizdirilən 18 baş dişi ada dovşanları. (Dişi dovşanların yaşı 5 aylıq, erkən dovşanların yaşı 7 aylıq). Dişi dovşanların bu cür qidalandırılması erkən dovşanlarla cütləşməzdən bir ay öncədən başlayaraq doğulan nəslin südlə qidalanma dövrü bitənə kimi davam etdirildi. Dişi dovşanlardan qan 2 dəfə götürüldü. Qanda hemoqlobinin qatılığı 065 markalı eritrohemometrdən istifadə edilərək ölçülmüşdür. Qanda eritrositlərin sayı Qarayev kamerasında işıq mikroskopunda təyin etmişik. Statistik hesablamalar qeyri – parametrik üsulla aparılmışdır [12; 13]. Təcrübələr Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyinin akademik Abdulla Qarayev adına Fiziologiya İnstitutunun “Radiasiya fiziologiyası” laboratoriyasında aparılmışdır. Alınmış nəticələr qeyri-parametrik üsulla statistik hesablanmışdır.

Aparılan tədqiqat işinin müzakirəsi

Bundan əvvəlki tədqiqat işimizdə dovşanların qidasına qatılmış yaşıl yoncanın Mg^{2+} ionlarının aşağı dozalarının toksiki təsirinin və onların qanında hemoqlobinin qatılığına və eritrositlərin sayına təsirini öyrənmişdik [1; 2; 3]. Bu tədqiqat işimizdə maqnezium ionlarının və yaşıl yoncanın dozalarını artırıdık.

Xroniki təcrübələrdə hər bir dişi dovşana erkək dovşanlarla cütləşməzdən 1 ay öncədən başlayaraq sutkada Mg^{2+} ionları suya qatılaraq müxtəlif dozalarda (50; 60; və 70 mkq) və uyğun olaraq 50, 60, 70 mq yaşıl yonca verilmişdir.

Kontrol heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı (127.5 ql; 4.13 milyon) 1 ay ərzində sutkada 50 mkq Mg^{2+} verilmiş heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı müvafiq olaraq (118.5 ql; 3.25 milyon), 60 mkq Mg^{2+} almış heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı (113.5 ql; 3.23 milyon) 70 mkq Mg almış heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı (121.5 ql; 3.63 milyon) olmuşdur. (cədvəl 1) 1 ay ərzində Mg^{2+} ionları qəbul etmiş ada dovşanlarının qanında əksər hallarda hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı intakt heyvanlarla müqayisədə daha az olur.

Alınan nəticələri müqayisə edərək %-lə ifadə etdik. Məlum oldu ki, 50 mkq Mg^{2+} almış heyvanlarda kontrol heyvanlarla müqayisədə hemoqlobinin qatılığı 7.05%, eritrositlərin sayı 21.5% 60 mkq Mg^{2+} almış heyvanlarda kontrol heyvanlarla müqayisədə hemoqlobinin qatılığı 10.8 %, eritrositlərin sayı 24.2% 70 mkq Mg^{2+} almış heyvanlarda kontrol heyvanlarla müqayisədə hemoqlobinin qatılığı 4.7 % , eritrositlərin sayı 24.5% az olur.

Təcrübələrimizin ikinci hissəsində biz qida tərkibinə maqnezium ionlarının müvafiq dozalarına uyğun olaraq yaşıl yonca əlavə etdik. Aldığımız nəticələri təhlil etdik də aşağıdakı nəticələri aldıq.

(Cədvəl 1)

Mg^{2+} ionlarının müxtəlif miqdarlarda yem paylarına qatılaraq dişi ada dovşanlarına verilməsinin onların qanında hemoqlobinin qatılığına və eritrositlərin sayına təsiri və dəyişmə dinamikası ($M \pm m$, $n=5$ təcrübəyə əsasən)

Təcrübələr	Göstəricilər	Hemoqlobinin qatılığı, (q/l)	Eritrositlərin sayı (milyon)
İntakt heyvanlar	$M \pm m$	127.5 ± 6	4.13 ± 0.4
	%	100	100
50 mkq Mg^{2+}	$M \pm m$	118.5 ± 4	3.25 ± 0.6
	P	< 0.01	< 0.01
	%	7.05	21.5
60 mkq Mg^{2+}	$M \pm m$	113.5 ± 3	3.13 ± 0.3
	P	< 0.05	< 0.05
	%	10.8	24.2
70 mkq Mg^{2+}	$M \pm m$	121.5 ± 3	3.63 ± 0.8
	P	< 0.01	< 0.01
	%	4.7	12.

Cədvəl 2

Mg^{2+} ionlarının və yaşıl yoncanın müxtəlif miqdarlarda yem paylarına qatılaraq dişi ada dovşanlarına verilməsinin onların qanında hemoqlobinin qatılığına və eritrositlərin sayına təsiri və dəyişmə dinamikası ($M \pm m$, $n=5$ təcrübəyə əsasən)

Təcrübələr	Göstəricilər	Hemoqlobinin qatılığı, (q/l)	Eritrositlərin sayı (milyon)
İntakt heyvanlar	$M \pm m$	127.5 ± 6	4.13 ± 0.4
	%	100	100
50 mkq Mg^{2+} və 50 q yaşıl yonca almış heyvanlar	$M \pm m$	132.5 ± 4	$> 4.65 \pm 0.6$
	P	> 0.05	0.01
	%	3.92	12.5

60 mkq Mg^{2+} və 60 q yaşıl yonca almış heyvanlar	M±m	142.5±3	5.88±0.3
	P	>0.01	>0.05
	%	19.2	42.3
70 mkq Mg^{2+} və 70 q yaşıl yonca almış heyvanlar	M±m	158.5.. ±3	6.91 ±0.8
	P	>0.05	>0.01
	%	23.9	67.3

Belə ki 1 ay ərzində sutkada yem paylarına 50 mkq Mg^{2+} və 50 qr yaşıl yonca əlavə edilmiş heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı intakt heyvanlarla müqayisədə (132.5 ql; 4.65 milyon), yem paylarına 60 mkq Mg^{2+} və 60 qr yaşıl yonca əlavə edilmiş heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı (142.5 ql; 5.88 milyon, qida paylarına 70 mkq Mg^{2+} və 70 qr yaşıl yonca əlavə edilmiş heyvanların qanında hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı (158.5 .q.l; 6.91 milyon) artmışdır. (Cədvəl 2)

Aldığımız nəticələri faizlə müqayisə etsək hemoqlobinin qatılığı və eritrositlərin sayı kontrol heyvanlarla müqayisədə (3.92 %, 12.5 %; 19.2%, 42.3 %; 23.9, 67.3) çoxalmışdır. Bu fərq ancaq bir halda 60mkq Mg^{2+} ionu və 60 q yaşıl yoncanı qida tərkibində almış heyvanlarda statistik etibarlıdır. (p 0.0.5).

Kontrol heyvanların qanında eritrositlərin sayı 4.13 = 0.4 milyon, 1 ay ərzində sutkada 50 mkq Mg^{2+} və 50 q yaşıl yonca almış heyvanların qanında eritrositləri sayı 2.65+ 0.5 milyon, 60 mkq Mg^{2+} və 60 q yaşıl yonca almış heyvanların qanında eritrositlərin sayı 2.45 milyon, 70 mkq Mg^{2+} və 70 q yaşıl yonca almış heyvanların qanında eritrositlərin sayı 3.0= 0.8 milyon olur (cədvəl). 1ay ərzində Mg^{2+} ionları və yaşıl yonca qəbul etmiş ada dovşanların qanında əksər hallarda eritrositlərin sayı intakt heyvanlarla müqayisədə daha az olur.

Alınan nəticələri müqayisə edərək % lə ifadə etdik. Məlum oldu ki, 50 mkq Mg^{2+} + 50 q yaşıl yonca almış heyvanlarda kontrol heyvanlarla müqayisədə eritrositlərin sayı 36%. 60 mkq Mg^{2+} və 60 q yaşıl almış heyvanlarda kontrol heyvanlarla müqayisədə eritrositlərin sayı 41%, 70 mkq Mg^{2+} və 70 q yaşıl yonca almış heyvanlarda kontrol heyvanlarla müqayisədə eritrositlərin sayı 27 % az olur.

Bu fərq bütün hallarda statistik etibarlıdır. Belə ki 50 mkq Mg^{2+} + 50 q yaşıl yonca almış heyvanlarda və 70 mkq Mg^{2+} + 70 q yaşıl yonca almış heyvanlarda kontrol heyvanlarla müqayisədə etibarlıq əmsalı $P > 0.05$, 50 mkq Mg^{2+} + 50 q yaşıl yonca almış heyvanlarda kontrol heyvanlarla müqayisədə etibarlıq əmsalı $P > 0.01$ olur. Kiçik dozalarda (50-60 mkq) Mg^{2+} ionlarının eritrositlərin sayına mənfi təsiri daha güclüdür, nəinki 70 mkq almış dovşanlarda. Biz bunu onunla izah edirik ki, 70 mkq Mg^{2+} ionlarının orqanizmə toksiki təsirini azaldan yaşıl yoncanın təsiridir. Buna baxmayaraq 70 mkq Mg^{2+} ionlarının orqanizmə mənfi təsiri tamamilə aradan götürülmüş və bu intakt heyvanların qanında eyni göstəricilərlə müqayisədə daha yüksək olması ilə izah edilir.

Aldığımız nəticələr göstərir ki, Mg^{2+} ionları kifayət qədər orqanizmdə hemoqlobinin qatılığına və eritrositlərin sayına əsaslı dərəcədə təsir göstərir. Bu elementlərin dozalarından asılı olaraq orqanizmdə baş verən dəyişikliklər də bir-birindən fərqlənir.

Bütün bunlara əsasən deyə bilərik ki, Mg^{2+} ionlarının kifayət bir miqdarı orqanizm üçün xeyirlidirsə onun izafi dozaları isə toksiki təsirə malikdir. Bu elementlərin normadan artıq qəbul edilməsi orqanizmdə qan göstəricilərinə, orqanlara, ümumiyyətlə bütün orqanizmə mənfi təsir göstərə bilər. Belə nəticəyə gələ bilərik qida paylarına Mg^{2+} ionları ilə birlikdə verilmiş yaşıl yonca Mg^{2+} ionları toksiki təsirini azaldır.

Nəticə

1. Dişi ada dovşanlarının yem paylarına Mg^{2+} ionlarının və yaşıl yoncanın müxtəlif dozalarının eyni zamanda qatılaraq verilməsi qanda hemoqlobinin qatılığını və eritrositlərin sayını çoxaldır.

2. Mg^{2+} ionlarının dozalarından asılı olaraq orqanizmdə baş verən toksiki dəyişikliklər bir-birindən fərqlənir, qidasına Mg^{2+} ionları ilə birlikdə verilmiş yaşıl yonca bu ionların toksiki təsirini azaldır.
3. Mg^{2+} ionlarının kifayət bir miqdarı orqanizm üçün əhəmiyyətlidirsə, onun yüksək dozaları isə orqanizmdə gedən fizioloji proseslərə toksiki təsir göstərirlər.

Ədəbiyyat

1. Abbasov, R.Y., Allahverdiyev B.H., Əliyeva N.N., Cəfərov Z.R (2013). Yem paylarına qatılmış müxtəlif dozada maqnezium ionlarının və yaşıl yoncanın ada dovşanların reproduktiv funksiyasına, qanda hemoqlobinin qatılığına və eritrositlərin sayına təsiri. AMEA, M.F. Nağıyev adına Kimya Problemləri İnstitutu. Kimya problemləri. Bakı. №2. səh 219-222.
2. Abbasov R.Y., Əliyeva N.N., Allahverdiyev B.H. (2011). Yemin tərkibində müxtəlif dozalarda dişə ada dovşanlarına verilmiş bəzi amin turşuların reproduktiv funksiyaya, hemoqlobinin və zərdab zülallarının qatılığına, eritrosit və leykositlərin sayına təsiri. AMEA-nın A.İ.Qarayev adına Fiziologiya İnstitutunun və Azərbaycan Fizioloqlar Cəmiyyətinin külliyyatı, Fiziologiyavə Biokimyanın problemləri. XXIX cild Bakı, 15-20 s.
3. Абабков М.М. (1969). Соденжание микроэлементов в пищеварительных соках и крови при введении в рацион животных молибдена, кобальта, меди и марганца, Микроэлементы в медицине и животноводство, Баку, с. 95.
4. Вдовиченко В.П., Гончарук В.В., Коршак Т.А., Бронская Г.М. (2016). Препараты калия/магния: рациональные основы применения в клинике. Медицинские новости. (11). 8-10. Available from: <https://cyberleninka.ru/article/n/preparaty-kaliyamagniya-ratsionalnye-osnovy-primeneniya-v-klinike>.
5. Bobkowski W., Nowak A., Durlach J. (2005). The Importance of Magnesium Status in the Pathophysiology of Mitral Valve Prolapse. Magnesium Research. Mar. 18 (1). 35-52. Available from: https://www.jle.com/en/revues/mrh/e-docs/the_importance_of_magnesium_status_in_the_pathophysiology_of_mitral_valve_prolapse_265367/article.phtml
6. Евсиков В.И., Назарова Г.Г., Рогов В.И. (1999). Популяционная экология водяной полевки (*Arvicola terrestris* L.) в Западной Сибири Сообщ. I.Репродуктивная способность самок, полиморфных по окраске шерстного покрова, на разных фазах динамики численности популяции //Сибир. Эколог. Журн., (1), с.59-68.
7. Л.Р. Ноздрюхина. (1977). Биологическая роль микроэлементов в организме животных и человека. Издательство «Наука». М.: 1977 6. с.110.
8. Перельдик Н.Ш., Титова М.И., Кузнецова Ю.Д. (1970) Воспроизводительная способность самок норок-первогодок в зависимости от количества триптофана и серосодержащих аминокислот в рационах. // нфуч. Тр. НИИ пушн. Зверероводства и кролиководства. т.9. С. 175-180.
9. С.А. Лебедева, А.А. Спасов, Л.И. Бугаева, А.В. Смирнов, В.А. Толокольников, Т.М. Бундикова (2015). Влияние дефицита магния на поведенческую активность, процессы фертильности и репродуктивные органы крыс-самок. НИИ фармакологии Волгоградского государственного медицинского университета Микроэлементы в медицине, 15-21.
10. Ходжаева З.С., Гурбанова С.Р. (2009). Дефицит магния, недифференцированные дисплазии соединительной ткани и истимико-церквиальная недостаточность. Проблемы репродукции. № 2. С. 97–100.
11. Царькова М.А. (2010). Применение магнийсодержащих препаратов при невынашивании беременности. Гинекология. Т. 12. № 6. С. 49–51.
12. Гублер Е.Б., Генкин А.А. (1973). Применение непараметрических критериев статистики. Л.Медицина.

13. Лакин Г.Ф. (1990). Биометрия М; Высшая школа. 352 с.
14. Овчинникова Л.Е. (2000). Роль трофических факторов в регуляции численности водяной полевки (*Arvicola terrestris* L.): Автореф. Дис канд. Биол. наук. ИС и ЭЖ СО РАН: Новосибирск, 20 с.
15. Тимофеева Н.М., Егорова В.В., Никитина А.А. (2008). Качество питания во время беременности или лактации программирует функционирование ферментных систем пищеварительных и не пищеварительных органов у «правнуков» во взрослой жизни. \\\ Журн. Эвол. Биох. И физиол. 44 (2). с. 214-219.
16. Gueorguiev M., Gyth M.I., Korbonits M (1998). Leptin and puberty: a review // Pituitary. 4, p.79-86.
17. Gtalarodo M.A., Albi J.J., Sanher J. (1996). Uptake of L-leucine by trout red blood cells and peripheral lymphocytes. // Membrane Biol., 152 №1. p. 57-63.
18. Millar G.N. (1991). Body composition and energy reserves of northern *Peromyscus leucopus* //J. Mammal. 62. p.786-794.
19. Wade G., Schneider J.E (1992). Metabolik fuels and reproduction in female mammals \\\ Neurosci, biobehav.Rev. 16. p.235-272.

EFFECT OF MAGNESIUM IONS AND GREEN CLOVER GIVEN TO FEMALE ISLAND RABBITS IN DIFFERENT DOSES IN THE FEED ON THE CONCENTRATION OF HEMOGLOBIN IN THE BLOOD AND THE COUNT OF ERYTHROCYTES

Bakhtiyar Allahverdiyev

Vafa Yagubova

Sevinj Ibrahimova

Laura Hasanova

Qabil Yusifov

Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Institute of Physiology named after Academician Abdulla Garayev, Baku, Azerbaijan

Azerbaijan State Medical University, Baku, Azerbaijan

Baku State University, Baku, Azerbaijan

Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan

Azerbaijan Sports Academy, Baku, Azerbaijan

The aim of our study was to study the effect of different amounts of Mg^{2+} ions added to the feed along with green clover and given to female rabbits for one month before mating with male rabbits on the hemoglobin concentration and erythrocyte count in their blood, and to show to what extent green clover added to the feed reduces the toxic effect of Mg^{2+} ions. Different amounts of Mg^{2+} ions and green clover were added to the feed. (50, 60, 70 mg Mg^{2+} and 50, 60, 70 g green clover). It was determined that as a result of the administration of Mg^{2+} ions, the hemoglobin concentration and the number of erythrocytes in the blood approached the same indicators in intact animals. Simultaneous administration of different doses of Mg^{2+} ions and green clover to the feed of animals increased the hemoglobin concentration and the number of erythrocytes in the blood.

The hemoglobin concentration in the blood of control animals was (127.5 g/l; 4.13 million), the hemoglobin concentration and erythrocyte count in the blood of animals given 50 mcg of Mg^{2+} per day for 1 month were (118.5 g/l; 3.25 million), and the hemoglobin concentration and erythrocyte count in the blood of animals given 70 mcg of Mg^{2+} were (121.5 g/l; 3.63 million). The hemoglobin concentration and erythrocyte count in the blood of animals supplemented with 50 μ g of Mg^{2+} and 50 g of green clover per day for 1 month increased compared to intact animals (132.5 g/l; 4.65 million), and the hemoglobin concentration and erythrocyte count in the blood of animals supplemented with 70 μ g of Mg^{2+} and 70 g of green clover increased (158.5 g/l; 6.91 million).

Our results show that the toxic changes occurring in the body depend on the doses of Mg^{2+} ions, and green clover given together with Mg^{2+} ions to the food rations reduces the toxic effect of Mg^{2+} ions.

Keywords: Mg^{2+} ions, green clover, hemoglobin, erythrocyte, island hare, food

ВЛИЯНИЕ ИОНОВ МАГНИЯ И ЗЕЛЕННОГО КЛЕВЕРА, ДАВАЕМЫХ САМКАМ ОСТРОВНЫХ КРОЛИК В РАЗЛИЧНЫХ ДОЗАХ С КОРМОМ, НА КОНЦЕНТРАЦИЮ ГЕМОГЛОБИНА В КРОВИ И КОЛИЧЕСТВО ЭРИТРОЦИТОВ

Бахтияр Аллахвердиев
Вафа Ягубова
Севиндж Ибрагимова
Лаура Гасанова
Габиль Юсифов

Министерство науки и образования Азербайджанской Республики, Институт физиологии имени академика Абдуллы Гараева, Баку, Азербайджан

Азербайджанский государственный медицинский университет, Баку, Азербайджан

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

Азербайджанский государственный педагогический университет, Баку, Азербайджан

Азербайджанская спортивная академия, Баку, Азербайджан

Целью нашего исследования было изучить влияние различных количеств ионов Mg^{2+} , добавляемых в корм самкам кроликов вместе с зеленью клевера в течение месяца перед случкой с самцами, на концентрацию гемоглобина и количество эритроцитов в их крови, а также показать, в какой степени добавление в корм зелени клевера снижает токсическое действие ионов Mg^{2+} . В корм добавляли различные количества ионов Mg^{2+} и зелени клевера (50, 60, 70 мг/кг Mg^{2+} и 50, 60, 70 г зелени клевера). Установлено, что в результате введения ионов Mg^{2+} концентрация гемоглобина и количество эритроцитов в крови приближались к показателям интактных животных. Одновременное введение различных доз ионов Mg^{2+} и зелени клевера в корм животным приводило к повышению концентрации гемоглобина и количества эритроцитов в крови. Концентрация гемоглобина в крови контрольных животных составила (127,5 г/л; 4,13 млн), концентрация гемоглобина и количество эритроцитов в крови животных, получавших 50 мкг Mg^{2+} в день в течение 1 месяца, составила (118,5 г/л; 3,25 млн), а концентрация гемоглобина и количество эритроцитов в крови животных, получавших 70 мкг Mg , составила (121,5 г/л; 3,63 млн). Концентрация гемоглобина и количество эритроцитов в крови животных, которым ежедневно в течение 1 месяца давали 50 мкг Mg^{2+} и 50 г зеленого клевера, увеличились по сравнению с интактными животными (132,5 г/л; 4,65 млн), тогда как концентрация гемоглобина и количество эритроцитов в крови животных, которым ежедневно давали 70 мкг Mg^{2+} и 70 г зеленого клевера, увеличились (158,5 г/л; 6,91 млн).

Ключевые слова: ионы Mg^{2+} , зеленый клевер, гемоглобин, эритроцит, островной заяц, пища

Daxil oldu: 08.07.2025

Çap edildi: 15.12.2025

PARABOLİK TƏNLIYƏ CIRLAŞAN SİNGULYAR HƏYƏCANLANMIŞ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN SONSUZ YARIMZOLAQDA QOYULMUŞ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ASİMPOTOTİKASI

İlhamə Səbzəliyeva

Röya Babayeva

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti, Bakı, Azərbaycan

e-mail: isabzaliyeva@mail.ru

e-mail: rbabayeva73@gmail.com

ORCID: 0009-0004-3382-0731

ORCID: 0009-0008-5634-3463

DOI: 10.30546/2960-1975.2025.2.311

Giriş

Biz fiziki xarakteristikasından digərlərinə keçidləri hamar olmayan və çox real proseslərin riyazi modellərinin tərtibi tənliklərinin qarşısında kiçik parametr olan xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunurlar. Belə diferensial tənliklərə singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər deyilir. Singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklərə A.N. Tixonov, L.S. Pontryagin, N.N. Boqolyubov, Y.A. Mitropolskiy, V. Vazov, V. Fridriks, N.J. Vişik, L.A. Lyusternik, O.A. Oleynik, E.F. Mişenko, N.X. Rozov, A.N. İlin və başqa bir çox görkəmli alimlərin diqqətlərini cəlb etmişdir. Hazırda singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərini tədqiq etmək üçün bir neçə asimptotik üsullar vardır. Lakin tətbiq dairəsinin genişliyi nöqtəyi-nəzərdən bu üsullardan ən effektiv M.I. Vişik və L.A. Lyusternikin tərəfindən işlənmiş və mahiyyəti ondan ibarət olan işlərində göstərilmiş metoddur [3, 4]. Bu üsul hazırda bütün dünyada “Vişik-Lyusternik metodu” adı altında məşhurdur.

“Vişik-Lyusternik metodu” işlənildikdən sonra singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər sahəsində olan tədqiqatların sayı sürətlə artmışdır. Hazırda xüsusi törəməli diferensial tənliklərin klassik tiplərinin hər üçünə aid kifayət qədər işlər məlumdur. Lakin singulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənliklərə dair tədqiqatların sayı elliptik və parabolik tənliklərə həsr olunmuş işlər ilə müqayisədə azdır.

İşdə aşağıdakı kvazixətti hiperbolik tənlik üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllinin kiçik parametrlə nəzərən asimptotikası qurulmuşdur: [5]

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \varphi(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial t} + \psi(t, x, u) = 0$$

Hamar sərhəddə malik olan məhdud $\Omega \subset R^3$ oblastında

$$\varepsilon u_{tt} + u_t - \Delta u + u^3 = f$$

tənliyi üçün bircins Dirixle məsələsi işində tədqiq edilmişdir [1].

Singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər sahəsində araşdırmalar müasir dövrdə də aktualıq kəsb edərək, sürətlə davam etdirilir.

M.M. Səbzəliyev və İ.M. Səbzəliyeva işlərində parabolik tənliyə cırlaşan sinqulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənlik üçün sonsuz zolaqda qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametrlə nəzərən tam asimptotikasını qurmuşlar [2].

Sinqulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənliklərə həsr olunmuş işlərin bir neçəsi istisna olmaqla əksəriyyətində məhdud oblastlarda qoyulmuş sərhəd məsələlərinə baxılır. Təqdim olunan bu işdə isə sinqulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənlik üçün sonsuz yarımzolaqda qoyulmuş sərhəd məsələsi tədqiq olunur.

1. Məsələnin qoyuluşu və iterasiya proseslərinin aparılması

Bu işdə $\Pi = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, 0 \leq x < +\infty\}$ sonsuz yarımzolağında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au = f(t, x), \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (2.2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u = 0, \quad (0 \leq t \leq T). \quad (2.3)$$

Burada $\varepsilon > 0$ -kiçik parametrlə, $a > 0$ -sabit, $f(t, x)$ – isə verilmiş kifayət qədər hamar funksiyadır. Məqsəd (2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametrlə nəzərən asimptotikasını qurmaqdır.

(2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinin həllinin asimptotik ayrılışını qurmaq üçün iterasiya prosesləri aparılır. Birinci iterasiya prosesinə (2.1) diferensial tənliyinin tətbiqi həlli

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n \quad (2.4)$$

şəklində axtarılır. W funksiyasının (2.4) ifadəsini

$$L_\varepsilon W = f(t, x) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (2.5)$$

bərabərliyində yazıb, ε –nün eyni dərəcəli qüvvətlərinin əmsalını müqayisə edərək, (2.4)-ün sağ tərəfinə daxil olan naməlum $W_i(t, x); i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı diferensial tənlikləri alırıq:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + aW_0 = f(t, x), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + aW_i = -\frac{\partial^2 W_{i-1}}{\partial t^2}; i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Aydındır ki, (2.6), (2.7) tənlikləri üçün (2.2) başlanğıc şərtlərindən yalnız birindən istifadə etmək olar. Biz (2.2)-də birinci yazılmış başlanğıc şərtindən istifadə edəcəyik. Onda $W_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyaları (2.2)-dəki ikinci başlanğıc şərtini ödəməyə bilirlər. İtən bu şərtin ödənilməsinə təmin etmək üçün ikinci iterasiya prosesi aparıb, $t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiya qurulmalıdır. Bu sərhəd zolaq tipli funksiyalar (2.2) başlanğıc şərtlərindən ikincisinin ödənilməsinə təmin etdikləri halda, W_i funksiyalarının ödədiyi birinci başlanğıc şərtini poza bilirlər. Ona görə də birinci iterasiya prosesini aparmaqdan əvvəl sərhəd zolaq tipli funksiyalar üçün tənlikləri yazmaq lazımdır.

$t = 0$ yaxınlığında $t = \varepsilon \tau, x = x$ əvəzləməsi apararaq. Onda $t = 0$ yaxınlığında L_ε operatorunun yeni (τ, x) koordinatlarında aşağıdakı ayrılığı alınır:

$$L_{\varepsilon,1} \equiv \varepsilon^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \varepsilon \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \right) \right\}. \quad (2.8)$$

$t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiyası

$$L_{\varepsilon,1} V = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (2.9)$$

tənliyinin təqribi həlli kimi

$$V = \varepsilon (V_0 + \varepsilon V_1 + \dots + \varepsilon^n V_n) \quad (2.10)$$

şəklində axtarıldıqda (2.10)-un sağ tərəfinə daxil olan $V_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı diferensial tənliklər alınır:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial V_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V_{i-1}}{\partial x^2} - a V_{i-1}; i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

İndi W_i funksiyalarının təyin ediləcəkləri (2.6), (2.7) diferensial tənlikləri üçün başlanğıc şərtlərini və V_i funksiyalarının təyin ediləcəkləri (2.11), (2.12) diferensial tənlikləri üçün sərhəd şərtlərini tapaq.

Tələb edək ki, $W + V$ cəmi aşağıdakı başlanğıc şərtini ödəsin:

$$(W + V)|_{t=0} = 0. \quad (2.13)$$

W -nin (2.4)-dəki, V -nin (2.10)-dakı ifadələrini (2.13)-də yazıb, ε -nun eyni dərəcəli qüvvətlərini müqayisə etdikdə alırıq:

$$W_0|_{t=0} = 0, \quad W_i|_{t=0} = -V_{i-1}|_{\tau=0}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

Qeyd edək ki, $W_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyaları (2.14) şərtlərini ödədikdə $W + V$ cəmi (2.13) şərtini dəqiq şəkildə deyil, aşağıdakı mənada ε -nun istənilən müsbət üstlü dərəcəsinə nəzərən dəqiqliklə təqribi ödəyəcəkdir:

$$(W + V)|_{t=0} = \varepsilon^{n+1} V_n|_{t=0}. \quad (2.15)$$

(2.11), (2.12) diferensial tənlikləri üçün sərhəd şərtləri $W + V$ cəminin

$$\frac{\partial}{\partial t} (W + V)|_{t=0} = 0. \quad (2.16)$$

şərtini ödəməsi tələbindən tapılır. (2.4), (2.10), (2.16) bərabərsizliklərindən və $t = \varepsilon \tau$ əvəzləməsindən alırıq:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = -\frac{\partial W_i}{\partial t} \Big|_{t=0}; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

(2.14)-də yazılmış ikinci bərabərlikdən və (2.17)-dən alınır ki, W_i və $V_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyaları növbə ilə $W_0, V_1, W_1, V_2, \dots, W_n, V_n$ ardıcılığı ilə təyin edilməlidirlər. Bu isə o deməkdir ki, ənənəvi üsuldən fərqli olaraq W_i funksiyalarının qurulması üçün aparılacaq birinci iterasiya prosesi, V_i sərhəd zolaq tipli funksiyaların qurulması üçün aparılacaq ikinci iterasiya prosesi ilə iç-içə salınmalıdır.

Qurulacaq $W + V$ cəminin (2.3) sərhəd şərtlərində ödəməsi üçün (2.6), (2.7) diferensial tənlikləri üçün

$$W_i|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W_i = 0; \quad (0 \leq t \leq T); i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

sərhəd şərtlərindən də istifadə olunmalıdır. Bundan əlavə $V_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarının da $x = 0$ olduqda və $x \rightarrow +\infty$ şərtində sıfır çevrilmələri təmin edilməlidir.

İndi isə W_i və $V_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarının qurulmasına keçək. (2.16), (2.14) və (2.18)-dən alırıq ki, W_0 funksiyası (2.6) diferensial tənliyinin

$$W_0|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty) \quad (2.19)$$

$$W_0|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W_0 = 0; \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.20)$$

başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyən həllidir. (2.6) tənliyi $\varepsilon = 0$ yazdıqda (2.1) diferensial tənliyindən alınır (2.6)-ya (2.1)-ə uyğun cırlanmış tənlik, (2.6), (2.19), (2.20) sərhəd məsələsinə isə (2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinə uyğun olan cırlanmış məsələ deyilir.

Məlumdur ki, (2.6) diferensial tənliyinin (2.19) başlanğıc şərtini və (2.20)-də birinci yazılmış sərhəd şərtini ödəyən məhdud həlli aşağıdakı düstur ilə təyin edilir:

$$W_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] \right\} \times \\ \times \exp[-a(t-\tau)f(\tau, \xi)] d\tau d\xi. \quad (2.21)$$

$f(t, x)$ funksiyası üzərinə elə şərt qoyulmalıdır ki, (2.21) düsturu ilə təyin olunan $W_0(t, x)$ funksiyası (2.20)-dəki ikinci sərhəd şərtini də ödəsin.

Bu məqsədlə aşağıdakı təklif isbat edilmişdir.

Teorem 2.1. Fərz edək ki, $f(t, x) \in C^{p,q}(\Pi)$ və aşağıdakı şərt ödənilir:

$$\left| \frac{\partial^k f(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} \right| \leq c_1 \exp(-c_2 x); c_1 > 0, c_2 > 0; k = k_1 + k_2; k_1 = 0, 1, \dots, p; k_2 = 0, 1, \dots, q, \quad (2.22)$$

burada p -ixtiyari natural ədəd, q -isə $q \geq 2$ şərtini ödəyən natural ədəddir. Onda (2.21) düsturu ilə təyin olunan $W_0(t, x)$ funksiyası (2.6), (2.19), (2.20) sərhəd məsələsinin həllidir və aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\left| \frac{\partial^k W_0(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} \right| \leq c_3 \exp(-c_2 x); c_3 > 0; k = k_1 + k_2; k_1 = 0, 1, \dots, p+1; k_2 = 0, 1, \dots, q. \quad (2.23)$$

Qeyd edək ki, bu teorem həm də sonra qurulacaq $V_0, W_1, V_1, \dots, W_n, V_n$ funksiyalarının da $x \rightarrow +\infty$ şərtində sıfır çevrilmələrini təmin edir.

Beləliklə, $W_0(t, x)$ funksiyası məlum olduğu üçün V_0 funksiyasını təyin etmək olar. V_0 funksiyası (2.11) adi diferensial tənliyinin $i = 0$ olduqda (2.17)-dən alınan

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=0} = -\frac{\partial W_0}{\partial t} \bigg|_{t=0} \quad (2.24)$$

şərtini ödəyən sərhəd zolaq tipli həllidir. (2.11) adi diferensial tənliyinə uyğun xarakteristik tənliyinin bir mənfi kökü vardır. Bu fakt (2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinin $t = 0$ üzərinə requlyar olaraq cırlaşdığını göstərir. V_0 funksiyası

$$V_0(\tau, x) = \frac{\partial W_0(0, x)}{\partial t} \exp(-\tau) \quad (2.25)$$

düsturu ilə təyin edilir. (2.20) və (2.25)-dən alınır ki, $V_0(\tau, x)$ funksiyası (2.24) şərtindən əlavə

$$V_0|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} V_0 = 0$$

şərtlərini də ödəyir .

$i = 1$ olduqda (2.7)-dən, (2.14)-dən və (2.3)-dən alınır ki, $W_1(t, x)$ funksiyası aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + aW_1 = \frac{\partial^0 W_0}{\partial t^2}, \quad (2.26)$$

$$W_1|_{t=0} = -V_0|_{\tau=0}, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (2.27)$$

$$W_1|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W_1 = 0; \quad (0 \leq t \leq T). \quad (2.28)$$

W_0, V_0 funksiyaları məlum olduqları üçün (2.26)-(2.28) sərhəd məsələsinin həlli olan $W_1(t, x)$ funksiyasını teorem 2.1-dən istifadə etməklə qurmaq olar.

Proses bu qayda üzrə davam etdirilərək, ardıcıl növbə ilə $V_1, W_2, \dots, W_n, V_n$ funksiyaları qurulurlar.

Aşağıdakı işarəni qəbul edək:

$$\tilde{u} = W + V = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \sum_{i=0}^n \varepsilon^{1+i} V_i. \quad (2.29)$$

(2.5) və (2.9)-dan alınır ki, $\tilde{u} = W + V$ funksiyası

$$L_\varepsilon \tilde{u} = f(t, x) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (2.30)$$

bərabərliyini ödəyir .

(2.3), (2.15), (2.16) və (2.29) –dan alınır ki, $\tilde{u}$ funksiyası aşağıdakı başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$\tilde{u}|_{t=0} = \varepsilon^{n+1} \varphi(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (2.31)$$

$$\tilde{u}|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{u} = 0, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.32)$$

burada $\varphi(x) = V_n|_{\tau=0}$.

$u - \tilde{u}$ fərqi $u - \tilde{u} = \varepsilon^{n+1} z$ ilə işarə edib, $\varepsilon^{n+1} z$ -i qalıq həddi adlandıraraq. Buradan və (2.23)-dən alırıq:

$$u = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \sum_{i=0}^n \varepsilon^{1+i} V_i + \varepsilon^{n+1} z. \quad (2.33)$$

(2.33) bərabərliyi (2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametmə nəzərən asimptotik ayrılışıdır. Asimptotik ayrılışı elmi cəhətdən əsaslandırmaq üçün $\varepsilon^{n+1} z$ qalıq həddindəki z funksiyasını qiymətləndirmək lazımdır.

2. Qalıq həddinin qiymətləndirilməsi və əsas nəticə

(2.1) tənliyindən (2.30) tənliyini tərəf –tərəfə çıxaraq və $u - \tilde{u} = \varepsilon^{n+1} z$ olduğunu nəzərə alaraq:

$$L_\varepsilon z = F(\varepsilon, t, x). \quad (3.1)$$

Buradakı $F(\varepsilon, t, x)$ funksiyası ε -nin bütün qiymətlərində

$$\iint_{\Pi} F^2(\varepsilon, t, x) dt dx \leq c \quad (3.2)$$

şərtini ödəyən funksiyadır, $c > 0$ isə ε -dan asılı olmayan sabitdir.

$u - \tilde{u} = \varepsilon^{n+1} z$ bərabərliyindən və (2.2), (2.3), (2.37), (2.38) şərtlərindən alınır ki, z funksiyası aşağıdakı başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$z|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (3.3)$$

$$z|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} z = 0, \quad (0 \leq t \leq T). \quad (3.4)$$

Buradakı $\varphi(x)$ funksiyası $\varphi(x) = -V_n(0, x)$ düsturu ilə təyin edilir və

$$\varphi(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \quad (3.5)$$

şərtini ödəyir.

Aşağıdakı təklif doğrudur.

Teorem 3.1. (3.1),(3.3),(3.4) sərhəd məsələsinin həlli olan z funksiyası üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \bigg|_{t=T} \right)^2 dx + \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{t=T} \right)^2 dx + \int_0^{+\infty} (z|_{t=T})^2 dx + c_1 \iint_{\Pi} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dt dx \leq c_2, \quad (3.6)$$

buradakı $c_1 > 0, c_2 > 0$ sabitləri ε -dan asılı deyillər.

İsbatı. Aşağıdakı köməkçi funksiyaya baxaq:

$$z_1 = (t^2 + 1)\varphi(x). \quad (3.7)$$

Ayındır ki, z_1 funksiyası da (3.3), (3.4) başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyir. Əgər $z_2 = z - z_1$ işarə etsək, z_2 funksiyası aşağıdakı sərhəd məsələsinin həlli olar:

$$L_\varepsilon z_2 = F_2, \quad (3.8)$$

$$z_2|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial t} \bigg|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (3.9)$$

$$z_2|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} z_2 = 0, \quad (0 \leq t \leq T). \quad (3.10)$$

Burada F_2 ilə $F_2 = F - L_\varepsilon(z_1)$ funksiyası işarə olunmuşdur. (3.2) və (3.7)-dən alınır ki, $F_2(\varepsilon, t, x)$ funksiyası ε -nın bütün qiymətlərində

$$\iint_{\Pi} F_2^2(\varepsilon, t, x) dt dx \leq c_3 \quad (3.11)$$

şərtini ödəyir, $c_3 > 0$ isə ε -dan asılı olmayan sabitdir.

(3.8) tənliyinin hər iki tərəfini $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ funksiyasına vurub, sol tərəfdə alınan ikinci həddən

başqa bütün hədləri (3.9), (3.10) şərtlərini nəzərə almaqla Π oblastı üzrə hissə-hissə integrallasaq alırıq:

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial z_2}{\partial t} \bigg|_{t=T} \right)^2 dx + \iint_{\Pi} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{t=T} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (z_2|_{t=T})^2 dx = \iint_{\Pi} F_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} dt dx. \quad (3.12)$$

(3.12)-nin sağ tərəfindəki həddə $ab \leq \alpha^2 a^2 + \frac{1}{4\alpha^2} b^2$ elementar bərabərsizliyini tətbiq edib,

(3.11)–i nəzərə alaraq və α -nı elə seçək ki, $2 - \alpha_2^2 = c_4 > 0$ olsun. Onda z_2 funksiyası üçün (3.6)

qiymətləndirməsinin doğru olduğu alınır (c_1 əvəzinə c_4, c_2 əvəzinə $c_5 = \frac{c_3}{\alpha^2}$ götürükdə).

(3.7) düsturu ilə təyin olunan z_1 funksiyası üçün (3.6) qiymətləndirilməsinin doğru olduğu aydındır. z_1 və z_2 funksiyalarının hər ikisi üçün (3.6) qiymətləndirilməsinin doğru olmasından və $z = z_1 + z_2$ düsturundan (3.6) qiymətləndirilməsinin z funksiyası üçün də doğruluğu alınır.

Teorem 3.1 isbat olundu.

Bu işdə alınan nəticələri aşağıdakı təklif şəklində ifadə etmək olar.

Teorem 3.2. Fərz edək ki, Π oblastında təyin olunmuş $f(t, x)$ funksiyası $p = n + 2, q = n + 2$ olduqda (2.22) şərtini ödəyir. Onda (2.1) - (2.3) sərhəd məsələsinin həlli üçün (2.33) asimptotik ayrılığı doğrudur. Buradakı W_i -funksiyaları birinci iterasiya prosesində təyin edirlər, V_i -funksiyaları $t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq ipli funksiyalar olub, ikinci iterasiya prosesində təyin olunurlar, $\varepsilon^{n+1}z$ qalıq həddidir və z funksiyası üçün (3.6) qiymətləndirilmə doğrudur.

Ədəbiyyat

1. Perjan A. (2006). Limits of solution to the semilinear wave equation with small parameter// Bul Akad Sci. Resp. Moldova, math., № 1, pp. 65-84.
2. Sabzaliyev M.M., Sabzaliyeva I.M. (2024). On asymptotics of solution of a boundary value problem for a quasilinear hyperbolic equation in an infinite strip// Proceedings of the 7th International Conference on Control Optimazation with Industrial Apllications (COIA 2020)- 26-28 august, Baku, Azerbaijan v 1., pp. 344-346.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. (1957). Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Успехи. матем. и наук. т.12, 5(77), с. 3–122.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. (1960). Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений// Успехи. матем. и наук, т. 15, вып. 3 (93), с. 3–80.
5. Су Юй-чен. (1961). Асимптотика решений некоторых вырождающихся квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка// Доклады АН СССР, 138 (1), с.935-938.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A SEMI-INFINITE STRIP FOR A SINGULARLY PERTURBED HYPERBOLIC EQUATION DEGENERATING INTO A PARABOLIC EQUATION

Ilhama Sabzaliyeva

Roya Babayeva

Azerbaijan State University of Oil and Industry, Baku, Azerbaijan

In this paper, we consider a boundary value problem in a semi-infinite strip for a singularly perturbed second-order hyperbolic equation degenerating into a parabolic equation. To construct the asymptotics of the solution to this problem in a small parameter, we use iterative processes. The first iteration process is based on a splitting of the given operator in the equation. The second iteration is based on the second splitting of the operator, which is obtained after the appropriate substitution. Constructing the asymptotics of the solution to this problem in the traditional way, i.e., performing the first iteration and then the second iteration, is not possible. Therefore, the iterative processes are embedded. We show that the problem regularly degenerates. We construct a complete asymptotics of this problem, and estimate the resulting remainder term.

Keywords: asymptotics, boundary layer type function, remainder term

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Ильхама Сабзалиева

Роя Бабаева

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан

В данной работе рассматривается краевая задачи в полубесконечной полосе для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося в параболическое уравнение. Для того, чтобы построить асимптотику по малому параметру решения рассмотренной задачи, проведены итерационные процессы. Первый итерационный процесс проведен на основе расщепление данного оператора в уравнении. Второй итерационный процесс проведен на основе второго расщепления оператора, которое получается после соответствующей замены. Построение асимптотики решения рассмотренной задачи традиционным способом, т.е. проводить первый итерационный процесс, а затем второй итерационный процесс, не получается. В связи с этим итерационные процессы вложены друг в друга. В работе показано, что рассмотренная задача регулярно вырождается. Построена полная асимптотика рассмотренной задачи и оценен полученный остаточный член.

Ключевые слова: асимптотика, функция типа пограничного слоя, остаточный член

Daxil oldu: 08.07.2025

Çap edildi: 15.12.2025

MODELLƏŞDİRMƏ ÜSULUNUN TƏDRİS PROSESLƏRİNƏ TƏTBİQİ

Mətanət Musayeva

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti, Bakı, Azərbaycan

e-mail: musayeva08@inbox.ru

ORCID: 0009-0001-3480-1135

DOI: 10.30546/2960-1975.2025.2.316

Xülasə. Məqalədə riyazi modelləşdirmə üsulunun pedaqoji proseslərə tətbiqi məsələsi araşdırılır. Müasir təhsil sistemində riyazi modellərin istifadəsi müəllimlərə və tələbələrə təhsil prosesini daha sistemli və analitik şəkildə dərk etməyə, təhlil etməyə və optimallaşdırmağa imkan verir. Riyazi modelləşdirmənin əsas aspektləri, tətbiq sahələri, metodoloji modellər və onların praktik nümunələri gətirilərək daha dəqiq təqdim olunur. Məqalədə həm nəzəri, həm də tətbiqi baxımdan pedaqoji təcrübə üçün əhəmiyyət daşıyan tövsiyələr verilir. İşdə araşdırılan məsələnin qoyuluşundan sonra pedaqoji proseslər və təhsil müəsisələri üçün modellərin qurulması, onların mərhələləri şərh olunur. İşin sonunda qısaca olaraq əsas nəticələr ifadə olunur və istifadə olunan ədəbiyyat siyahısı gətirilir. Bir sıra ümumiləşmələr işin kompaktlığı üçün yeri gəldikcə gətirilir və göstərilir. Müəllif işin müəllimlərə və tələbələrə, məqalədə göstərilənlərlə maraqlanan hər kəsə, istifadə zamanı faydalı olmağa çalışmışdır.

Açar sözlər: riyazi modelləşdirmə, pedaqoji proseslər, simulyasiya, optimallaşdırma, təhsil texnologiyaları

Giriş

Riyazi modelləşdirmə üsulunun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, araşdırılan obyekt-proses və ya real hadisə riyazi olaraq ifadə olunur, yəni o riyazi yazılır, modelləşdirilir, sonra onun üçün qarşıda qoyulan məqsədə uyğun olaraq araşdırma alqoritmı qurulur və informatika yolları ilə informasiya texnologiyalarının istifadə olunması ilə həmin model öyrənilir-imitasiya, simulyasiya və sair olunur. Başqa sözlə, real obyektlər, hadisələr, proseslər onların modelləri ilə (riyazi modelləri ilə) əvəz olunur və informatika yolları ilə öyrənilir. Bu zaman real obyektlər, hadisələr, proseslər toxunulmaz qalır. Riyazi modelləşdirmənin bu üstünlüyü göz önündədir və onların tətbiq dairəsinin geniş olması aydın görünür.

İndiki dövrdə riyaziyyatın riyazi modelləşdirmə üsullar vasitəsi ilə tədqiq olunmayan hadisə proses, obyekt və sair göstərmək çətindir. Riyazi modelləşdirmə metodologiyası “model-alqoritm-program” üçlüyü vasitəsilə informatika yolları ilə geniş obyektlərə, hadisələrə, proseslərə, hətta çətin formalaşa bilən proseslərə tətbiq olunur. Riyazi modelləşdirmə üsulunun tədris proseslərinə tətbiqi xüsusi əhəmiyyət daşıdığı aydındır [1-9].

Riyazi modelləşdirmə, təhsil prosesini müasir yanaşmalarla sistemli və analitik şəkildə təşkil etməyə imkan verən mühüm metodologiyadır. Müasir təhsil sistemində analitik yanaşmaların və rəqəmsal texnologiyaların tətbiqi sürətlə artır, bu səbəbdən riyazi modelləşdirmə pedaqoji proseslərin optimallaşdırılması və tədrisin effektivliyinin artırılması üçün aktualdır. Burada riyazi modelləşdirmə üsullarının tədris prosesinə sistemli tətbiqi üçün konkret metodoloji model təklif olunur və onun statistik, optimallaşdırma və simulyasiya aspektləri praktik nümunələrlə göstərilir. Bu, mövcud tədqiqatlardan fərqli olaraq, həm nəzəri, həm də tətbiqi baxımdan pedaqoji proseslərin optimallaşdırılmasını birləşdirir. Bu iş müəllimlər və tələbələr arasında pedaqoji prosesləri daha effektiv öyrənmə və tədris əlaqələrinin qurulmasına, problemlərin dərin analitik təhlilinə və optimal həllərin tapılmasına şərait yaradır [4-6].

Riyazi modelləşdirmənin üsulunun pedaqoji praktikaya tətbiqi bir neçə əsas mərhələni əhatə edir. Aşağıda riyazi modelləşdirmə üsulunun pedaqoji proseslərə tətbiqinin əsas aspektləri sadalanır. Riyazi modelləşdirmə üsullarının pedaqoji proseslərə tətbiqi, təhsildəki məsələlərin analizi və həlli üçün riyazi nəzəriyyələrin, metodlarının istifadə edilməsini əhatə edir. Bu yanaşma, müəllimlərə və tələbələrə kompleks problemləri anlamaq, qiymətləndirmək və effektiv qərarlar verməkdə kömək edir. Riyazi modelləşdirmə, pedaqoji prosesdə təhlil, proqnozlaşdırma və qərar qəbulətməni dəstəkləyən elmi-metodoloji yanaşmadır. Aşağıda bu

sahənin əsas aspektləri müzakirə olunur. Aşağıda məsələnin qoyuluşundan sonra pedaqoji proseslər üçün riyazi modelin əsas mərhələləri və aparılan araşdırmanın metodoloji əsasları izah olunur, sonra alınan nəticələr qısaca şərh edilir. Hər yerdə izahın kompaktlığına və aydınlığına xüsusi fikir verilir.

3. Məsələnin qoyuluşu

Riyazi modeləşdirmənin əhəmiyyəti bu məsələnin həlində aşkar görünür, xüsusi ilə, məlumatların idarə edilməsi işində tətbiqinə baxaq. Bu tədris prosesində toplanan məlumatların sistemli şəkildə təhlilinə imkan verir, müxtəlif təlim strategiyalarının nəticələrini əvvəlcədən proqnozlaşdırmağa kömək edir [6].

- **Proqnozlaşdırma:** Müxtəlif təlim strategiyalarının nəticələrini əvvəlcədən proqnozlaşdırmaq mümkündür. Pedaqoji proseslərin nəticələrini proqnozlaşdırmaq üçün riyazi modellərdən istifadə edilə bilər [2].
- **Qərar qəbulətmə:** Təhsil planlamasında, idarəetmə prosesində və resursların bölüşdürülməsində optimal qərarların verilməsini təmin edir.

Tətbiq sahələri:

- **Təhsilin planlanması:** kurikulumların, dərslər cədvəllərinin, onların modellərinin, təhsil proqramlarının və resursların planlaşdırılması üçün istifadə edilə bilər.
- **Tələbə nailiyyətlərinin qiymətləndirilməsi:** Statistik modellər vasitəsilə tələbə nailiyyətləri analiz edilə bilər [1-3].
- **Tədris metodlarının müqayisəsi:** Müxtəlif pedaqoji və müxtəlif tədris metodlarının nəticələrini müqayisə etmək üçün riyazi yanaşmalar istifadə olunur.

Riyazi modelin aşağıdakı nümunələrini göstərmək olar:

- Statistik analiz:** Tələbələrə nəticələrinin statistik təhlili, tədris prosesinin müsbət və mənfi tərəflərini müəyyənləşdirməyə kömək edir.
- Regressiya modeli:** Müəllim tələbə nəticələrini proqnozlaşdırmaq üçün sadə xətti model qura bilər:

$$P(n) = \beta_0 + \beta_1 D + \beta_2 E + \beta_3 S + \epsilon$$

burada:

- $P(n)$ — tələbənin imtahan nəticəsi (proqnozlaşdırılan nəticə), n - asılı dəyişənlər çoxluğu, D — dərslər davamiyyəti, E — ev tapşırıqları, S — sınaq nəticələri, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — əmsallar (modelin öyrədilməsi zamanı tapılır), ϵ — təsadüfi xəta payı. Burada modelə R^2 əmsalı, yəni determinasiya əmsalı əlavə edilərək modelin dəqiqliyi qiymətləndirilə bilər [5].

- **Optimallaşdırma modeli:** Resursların daha effektiv istifadəsi üçün optimallaşdırma yanaşmaları tətbiq oluna bilər [7].

Təhsil müəssisəsində dərslər cədvəllərinin optimallaşdırılması problemi aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər:

$$\min Z = \min \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

şərtlərlə:

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{və ya} \quad \sum_i x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \{0,1\}$$

Burada x_{ij} — müəllim i -nci dərslərini j -ci vaxtda təyin etmə qərarı, c_{ij} — həmin təyinatın “xərci” (müəllim yüklənməsi, auditoriya mövcudluğu və s.).

Bu model, xətti proqramlaşdırma üsulları ilə həll edilərək minimal yüklənməni və maksimal effektivliyi təmin edən cədvəl verir. [1].

- **Simulyasiya modelləri:** Pedaqoji proseslərin müxtəlif ssenarilər altında necə işləyəcəyini simulyasiya etmək üçün riyazi modellər istifadə edilə bilər.

Tutaq ki, müəllim dərslər strategiyasını dəyişməklə tələbələrin nəticələrini simulyasiya etmək istəyir.

$$P_i^{(t+1)} = P_i^t + \alpha D_i + \beta E_i + \gamma S_i$$

Burada P_i^t – i -ci tələbənin t -ci dövrdəki nəticəsi, D_i – dərslər davamiyyəti, E_i – ev tapşırığı icrası, S_i – sınaq nəticəsi. Müəllim fərqli α , β , γ dəyərləri ilə simulyasiya aparır və hansı strategiyanın nəticəyə daha çox təsir etdiyini görür. [8-9]

3. Riyazi modelin qurulması mərhələləri

Əvvəlcə problemin müəyyənləşdirilməsi, yəni dəqiqləşdirilməsi aparılmalıdır. Tədris prosesində əsas problemlər seçilir və tədqiqat sualları formalaşdırılır. Müəllim, şagirdlərin dərslər planları və resursların səmərəli istifadəsi kimi məsələləri aydınlaşdırmalıdır. Bu mərhələdə, tədqiqat sualları formalaşdırılaraq modelin yönü müəyyən edilir. Pedaqoji prosesdə hansı məsələlərin modelə daxil ediləcəyini seçir.

- **Riyazi tənliliklərin tərtibi:** Dəyişənlər və məhdudiyyətlər müəyyən edilərək riyazi çərçivə yaradılır. Növbəti mərhələdə, seçilmiş problemləri əks etdirən riyazi tənliliklər və funksiyalar yaradılır. Bu, məsələlərin riyazi dilə çevrilməsini və onlarla işləmək üçün bir çərçivə yaradılmasını təmin edir. Dəyişənlərin müəyyənləşdirilməsi və onların interaksiyaları modelin əsasını təşkil edir.
- **Analiz və proqnozlaşdırma:** Toplanan məlumatlar statistik metodlarla təhlil olunur, fərqli ssenarilər simulyasiya edilir və proqnozlaşdırılır. Riyazi modelləşdirmənin müsbət cəhətlərindən biri, statistik analiz və simulyasiya vasitəsilə müxtəlif ssenarilərin test edilməsidir. Bu mərhələdə, müvafiq məlumatlar toplanaraq təhlil edilir, və fərqli dərslər metodlarının effektivliyi qiymətləndirilir.

4. Təhsil müəssisələrində riyazi modeləşmə üsulunun tətbiqi

- **Təlimatların inkişafı:** riyazi modeləşdirmə, müəllimlərin daha effektiv təlimatlar hazırlamasına kömək edir.
- **Tələbə maraqları:** riyazi yanaşmaların tətbiqi, tələbələrin riyazi düşünmə qabiliyyətini artırır və onlara daha dərin anlayış qazandırır.

5. Riyazi modelləşdirmə üsulunun pedaqoji proseslərə tətbiqinin metodoloji əsasları.

Riyazi model, tədris proqramlarına inteqrasiya edilərək praktikada tətbiq olunur. Müəllimlər, riyazi modelləşdirmənin nəticələrini dərslərdə istifadə edərək tələbələrin öyrənmə prosesini daha da optimallaşdırmaqla bilər. Eyni zamanda, bu tətbiq vasitəsilə tələbələrin riyazi düşüncə qabiliyyətləri artır. Riyazi modelləşdirmənin pedaqoji proseslərə tətbiqi üçün bir metodoloji modelin yaradılması, riyazi düşüncənin və yanaşmaların sistemə tətbiqini əhatə edir.

Metodoloji model aşağıdakı komponentlərdən ibarətdir: [1]

- a) **Problemin müəyyənləşdirilməsi:** Tədris prosesindəki konkret problemlər seçilir və onlara dair tədqiqat sualları formalaşdırılır.
- b) **Riyazi modelin qurulması:** Problemi əks etdirən riyazi tənliliklərin yaradılması. Bu, məsələnin riyazi dilə çevrilməsini əhatə edir.
- c) **Analiz və simulyasiya:** Məlumatların təhlili üçün statistik üsullar tətbiq edilir və fərqli ssenarilər simulyasiya olunur.
- d) **Nəticələrin yığılması və qiymətləndirilməsi:** Modelin nəticələri toplanaraq təhlil edilir, effektivliyi və dəqiqliyi qiymətləndirilir.
- f) **Tətbiq və inteqrasiya:** Riyazi model tədris proqramlarına inteqrasiya edilir və tətbiqin nəticələri izlənilir.
- g) **Geridönüş və təkmilləşdirmə:** Tələbə və müəllimlərdən alınan geribildirimlər toplanır və modelin təkmilləşdirilməsi üçün istifadə olunur.

Son mərhələdə, modelin təkmilləşdirilməsi və yenidən tənzimlənməsi üçün istifadə olunur. Beləliklə, riyazi modelləşdirmə prosesinin dövrü və dinamik olması təmin edilir [1-2].

Tətbiqə dair nümunəgöstərək. Bir müəllim tələbələrin imtahan nəticələrinin zəiflədiyini müşahidə edir. O, davamiyyət, ev tapşırığı icrası və sınaq qiymətlərini daxil edən riyazi model quraraq müxtəlif tədris strategiyalarını simulyasiya edir [4-6]. Nəticələrə əsasən ən effektiv strategiyanı seçir, dərstdə tətbiq edir və təkrar qiymətləndirmə apararaq nəticələrin yaxşılaşdığını yoxlayır. O, aşağıdakı addımları izləyə bilər:

A) **Problemin müəyyənləşdirilməsi:** Tələbələrin nəticələrinin düşməsi.

B) **Modelin qurulması:** Tələbələrin dərslə davamiyyətini, ev tapşırıqlarını və test nəticələrini əks etdirən riyazi tənliklər yaradılması.

C) **Analiz və simulyasiya:** Fərqli dərslər metodlarının nəticələrini simulyasiya etmək.

D) **Nəticələrin toplanması:** Hər bir metodun nəticələrini toplamaq.

F) **Tətbiq:** Daha effektiv metodların sinifdə tətbiqi.

G) **Geridönüş:** Tələbələrdən və müəllimlərdən alınan geribildirimlərin toplanması.

Bu metodoloji model, riyazi modelləşdirmənin təhsil proseslərinə integrasiyasını sistemə şəkildə təmin edir.

Nəticə

Riyazi modelləşdirmə üsullarının pedaqoji proseslərə tətbiqi, təhsildə daha sistemə və analitik yanaşmaların əldə olunmasına şərait yaradır. Bu yanaşma, müəllimlər və tələbələr arasında daha dərin və ənləmlı əlaqələr qurmağa, ələcə də təhsilin keyfiyyətini artırmağa kömək edir. Riyazi modellərin effektiv tətbiqi, təhsil sisteminin müasirləşdirilməsi üçün əhəmiyyətli bir addım ola bilər. Bu aspektlər, riyazi modelləşdirmənin təhsil prosesinə integrasiya olunmasının necə həyata keçirilə biləcəyini göstərir. Riyazi modellər, təhsilin daha effektiv, sistemə və analitik olmasına kömək edir. Riyazi modelləşdirmə, təhsil sisteminin müasirləşdirilməsi və keyfiyyətinin artırılması üçün əhəmiyyətli bir vasitədir. Bu yanaşma, müəllimlərə və tələbələrə daha analitik və sistemli düşünmə bacarıqları qazandırır, nəticədə öyrənmə prosesini daha da dərinləşdirir.

Ədəbiyyat

1. Əliyev R. (2020). Riyazi modellərin tədrisdə tətbiqi. Bakı: Təhsil Nəşriyyatı.
2. Həsənov F. (2018). Təhsil proseslərinin optimallaşdırılması: Statistika və modelləşdirmə. Bakı: Elm.
3. Quliyev T. (2019). Simulyasiya modelləri və pedaqoji tədqiqatlar. Bakı: Təhsil.
4. Məmmədov A. (2022). Təhsildə idarəetmə və riyazi modelləşdirmə. Bakı: Elm nəşriyyatı.
5. Blum, W., Niss, M., & Borromeo Ferri R. (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study. Springer Science & Business Media.
6. Stillman, G., Blum, W., & Brown J. P. (2013). Applications and Modelling in Mathematics Education: New Perspectives. Springer Science & Business Media.
7. Мусаева М.А. (2020). Вычисление ресурсов и анализ эффективности стратегий в игровой модели противоборства // НИВЦ МГУ, Журнал вычислительные методы и программирование – т. 21, №3, с.251–258.
8. Мусаева М.А. (1997). Вариационный метод определения комплексных коэффициентов нелинейного и нестационарного уравнения типа Шредингера // Ж. Вычислительной математики и математической физики, 60 (11), с.1985.
9. Мусаева М.А. (2023). Вычислительные методы определения квантовых потенциалов // Баку: АГПУ –549 с.

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELING METHODS TO EDUCATION PROCESSES

Matanat Musayeva

Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan

This article about the application of mathematical modeling to the pedagogical processes. The use of mathematical models in the modern education system allows teachers and students to more systematically and analytically understand, analyze and optimize the educational process. The article presents a more detailed overview of the key aspects of mathematical modeling, its areas of application, methodological models and practical examples. The article provides recommendations that are important for pedagogical practice from both a theoretical and practical perspective. After formulating the problem under study, the paper explains the construction of models of pedagogical processes and educational institutions and outlines their main stages. This paper concludes with a summary of the main results and a list of references. A number of generalizations are provided, which are cited as necessary for the concise presentation of the paper. The author has made an effort to make this work useful for both teachers and students, as well as for everyone who will try to use it.

Keywords: mathematical modeling, pedagogical processes, simulation modeling, optimization, educational Technologies

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ К ПРОЦЕССАМ ОБУЧЕНИЯ

Матанат Мусаева

Азербайджанский государственный педагогический университет, Баку, Азербайджан

В статье рассматриваются вопросы применения метода математического моделирования к педагогическим процессам. Использование математических моделей в современной системе образования позволяет преподавателям и студентам более системно и аналитически понимать, анализировать и оптимизировать образовательный процесс. Более точно представлены основные аспекты математического моделирования, области применения, методические модели и их практические примеры. В статье даны рекомендации, важные для педагогической практики как с теоретической, так и с практической точки зрения. После формулировки исследуемой проблемы в работе поясняется построение моделей педагогических процессов и образовательных учреждений и дается их основные этапы. В конце работы кратко излагаются основные результаты работы и приводится список использованной литературы. Приводится ряд обобщений, которые указываются по мере их необходимости для компактного изложения в работе. Автор приложил усилия, чтобы сделать работу полезной как для преподавателей и студентов, так и для всех кто займется этим.

Ключевые слова: математическое моделирование, педагогические процессы, имитационное моделирование, оптимизация, образовательные технологии

Daxil oldu: 08.07.2025

Çap edildi: 15.12.2025

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕНЫМ

Габил Ягуб

Натиг Ибрагимов

Туба Улкер

Карсский кавказский университет, Карс, Турция

Лянкяранский государственный университет, Лянкяран, Азербайджан

э-почта: gabilya@mail.ru

э-почта: natiq_ibrahimov@mail.ru

ORCID: 0000-0002-8343-4087

ORCID: 0009-0003-4385-4794

DOI: 10.30546/2960-1975.2025.2.327

Аннотация. В данной работе рассматривается задача оптимального управления для нелинейного нестационарного одномерного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом, когда критерий качества является интегралом по границе области и роль управления играют ограниченные измеримые коэффициенты уравнения, то есть вещественные и мнимые части комплексного потенциала, зависящие только от временной переменной. При этом доказываются теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи оптимального управления.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, задача оптимального управления, градиентное слагаемое, комплексный потенциал

Введение

Задачи оптимального управления для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники и изучение этих задач носит как теоретический, так и практический интерес [1-3]. Одной из таких задач является задачей движения заряженных частиц в которой потенциал является неизвестным и подлежит определению. Известно, что если заряженная частица в постоянном однородном магнитном поле движется и направление магнитного поля выбрано вдоль оси z , тогда движение такой частицы происходит в плоскости $(x, y) \in E_2$ и это движение обычно описывается двумерным линейным уравнением Шредингера со специальным градиентным слагаемым (см. [1, с.182]). Подобные задачи оптимального управления для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым ранее изучены в работах [4,5,16-21]. Следует отметить, что во всех этих работах в задачах оптимального управления, от управляющих функций потребовались дифференцируемость по временной переменной. Отметим, что задачи оптимального управления для линейного и нелинейного нестационарного уравнений Шредингера без специального градиентного слагаемого ранее подробно изучены в работах и др [6-15]. Однако задачи оптимального управления для нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и когда управления являются вещественными и мнимыми частями комплексного потенциала и выбираются из класса измеримых ограниченных функций, зависящих только от временной переменной, наиболее мало исследованы. В этом направлении можно отметить работы, в которых изучены задачи оптимального управления для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются вещественными и мнимыми частями комплексного потенциала и выбираются из класса измеримых ограниченных

функций, зависящих только от временной переменной, а критерии качества являются финальными [22, 23]. Поэтому данная работа, посвященная изучению задачи оптимального управления для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются вещественными и мнимыми частями комплексного потенциала и выбираются из класса измеримых ограниченных функций, зависящих только от временной переменной, а критерий качества является интегралом по границе области, представляет немалый научный интерес.

Постановка задачи

Пусть $l > 0$, $T > 0$ - заданные числа, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, $\Omega_l \equiv (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$; $C^k([0, T], B)$ - банахово пространство функций, k -раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_p(0, l)$ -лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0, l)$ со степенью $p \geq 1$; $L_2(0, T; B)$ - банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_\infty(0, T; B)$ - банахово пространство измеримых ограниченных на $(0, T)$ функций со значениями в банаховом пространстве B ; Соболевы пространства $W_p^k(0, l)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$ $p \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 0$, определены, например, в работах [24-26]. Ниже всюду положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через c_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ и комплексное сопряжение к функции обозначим чертой над функцией. Принадлежность комплексной функции к определенному пространству означает, что действительная и мнимая части этой функции принадлежат к этому пространству.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления о минимизации функционала:

$$J_\alpha(v) = \beta_0 \|\psi(0, \cdot) - y_0\|_{L_2(0, T)}^2 + \beta_1 \|\psi(l, \cdot) - y_1\|_{L_2(0, T)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (2.1)$$

на множестве:

$$V = \left\{ v = v(t) = (v_0(t), v_1(t)) : v_s \in L_2(0, T), |v_s(t)| \leq b_s, s = 0, 1, \forall t \in (0, T) \right\}$$

при условиях:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + v_0(t) \psi + iv_1(t) \psi + a_2 |\psi|^2 \psi = f(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), x \in (0, l), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T), \quad (2.4)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $a_0 > 0, b_s > 0, s = 0, 1, \alpha \geq 0, \beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_0 + \beta_1 \neq 0$ - заданные числа; a_2 - комплексное число, удовлетворяющее условиям:

$$a_2 = \operatorname{Re} a_2 + i \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Im} a_2 > 0, \operatorname{Re} a_2 < 0, \operatorname{Im} a_2 \geq 2|\operatorname{Re} a_2|; \quad (2.5)$$

$a(x), a_1(x, t)$ - измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1, \left| \frac{da(x)}{dx} \right| \leq \mu_2, \left| \frac{d^2 a(x)}{dx^2} \right| \leq \mu_3, \quad \forall x \in (0, l), \quad \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 = \text{const} > 0; \quad (2.6)$$

$$|a_1(x, t)| \leq \mu_4, \left| \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \right| \leq \mu_5, \left| \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} \right| \leq \mu_6, \quad \forall (x, t) \in \Omega, \quad a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, \quad \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = \text{const} > 0; \quad (2.7)$$

$\varphi(x), f(x, t), y_0(t), y_1(t)$ - комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(0, l), \quad \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0; \quad (2.8)$$

$$f \in W_2^{2,0}(\Omega), \quad \frac{\partial f(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial f(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, T); \quad (2.9)$$

$$y_0, y_1 \in L_2(0, T); \quad (2.10)$$

$\omega \in H$ - заданный элемент, $H \equiv L_2(0, T) \times L_2(0, T)$ и символ $\forall$ означает “при почти всех”.

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v)$ из условий (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ будем называть редуцированной задачей. Ясно, что редуцированная задача является второй начально-краевой задачей для линейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым.

Определене 2.1. При каждом $v \in V$ под решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) будем понимать функцию $\psi = \psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2.2) для почти всех $(x, t) \in \Omega$, а начальному условию (2.3) для почти всех $x \in (0, l)$ и краевым условиям (2.4) для почти всех $t \in (0, T)$.

О разрешимости редуцированной задачи

Редуцированные задачи, то есть начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнений без специального градиентного слагаемого ранее изучены, например, в работах [6-8, 10, 11, 27, 28] и др., а со специальным градиентным слагаемым, например, в работах [4, 5, 20, 21, 29-33] и др. Во всех этих работах от коэффициентов уравнения Шредингера потребовались дифференцируемость по временной переменной. Следует отметить, что начально-краевые задачи для нестационарного уравнения Шредингера без специального градиентного слагаемого, когда коэффициенты зависят только от временной переменной и являются измеримыми ограниченными функциями ранее изучены в работе [11]. Однако начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящим только от временной переменной изучены в работах [34, 35]. Следует отметить, что в работе [35] изучена вторая начально-краевая задача для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда вещественные и мнимые части комплексного потенциала являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими только от временной переменной и доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть число a_2 и функции $a(x)$, $a_1(x, t)$, $\varphi(x)$, $f(x, t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.9). Тогда редуцированная задача (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 (\|\varphi\|_{W_2^{2,0}(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^{1,0}(0,l)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6), \quad (3.1)$$

где $c_0 > 0$ - постоянная

В силу вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ пространству $C^0([0, T], L_2(0, l))$ рассматриваемый функционал (2.1) в рассматриваемом классе решений при каждом $v \in V$ имеет смысл.

Существование и единственность решения задачи оптимального управления

В этом параграфе будем изучать вопрос существования и единственности решения задачи оптимального управления (2.1)-(2.4). Поэтому сначала будем установить результат о существовании единственного решения этой задачи.

Теорема 4.1. Пусть число a_2 и функции $a(x)$, $a_1(x, t)$, $\varphi(x)$, $f(x, t)$, $y_0(t)$, $y_1(t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.10). Пусть, кроме того, $\omega \in H = L_2(0, T) \times L_2(0, T)$ - заданный элемент. Тогда существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет единственное решение.

Доказательство опирается на следующее утверждение из невыпуклой оптимизации, указанное в работе [39] в следующей формулировке: если функционал $I_0(v)$ полунепрерывен снизу и снизу ограничен на замкнутом ограниченном множестве U равномерно выпуклого пространства X , тогда существует всюду плотное подмножество G этого пространства, что для любого $\omega \in G$ и $\alpha > 0$ функционал $I_\alpha(v) = I_0(v) + \alpha \|v - \omega\|_X^2$ достигает наименьшее значение на единственном элементе множества U .

Сперва докажем непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V . При принятых условиях функционал $J_0(v)$ примет вид:

$$J_0(v) = \beta_0 \|\psi(0, \cdot) - y_0\|_{L_2(0, T)}^2 + \beta_1 \|\psi(l, \cdot) - y_1\|_{L_2(0, T)}^2. \quad (4.1)$$

Пусть $\delta v \in B = L_\infty(0, T) \times L_\infty(0, T)$ - приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$ и $\delta \psi = \delta \psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v + \delta v) - \psi(x, t; v)$, где $\psi(x, t; v)$ - решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v \in V$. Из условий (2.2)-(2.4) следует, что функция $\delta \psi = \delta \psi(x, t)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$i \frac{\partial \delta \psi}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} - a(x) \delta \psi + (v_0(t) + \delta v_0(t)) \delta \psi + i(v_1(t) + \delta v_1(t)) \delta \psi + a_2(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \delta \psi + a_2 \psi_\delta \psi \delta \bar{\psi} = -\delta v_0(t) \psi(x, t) - i \delta v_1(t) \psi(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (4.2)$$

$$\delta \psi(x, 0) = 0, x \in (0, l), \frac{\partial \delta \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \delta \psi(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T), \quad (4.3)$$

где $\psi_\delta = \psi_\delta(x, t) \equiv \psi(x, t; v + \delta v)$ - решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v + \delta v \in V$, $\delta v \in B$.

Установим оценку для решения начально-краевой задачи (4.2), (4.3). С этой целью обе части уравнения (4.2) умножим на функцию $\delta\bar{\psi}(x, t)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_t . Тогда, используя формулу интегрирования по частям и краевые условия из (4.3), получим равенство,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \delta\psi}{\partial t} \delta\bar{\psi} - a_0 \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right|^2 + i a_1(x, \tau) \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \delta\bar{\psi} - a(x) |\delta\psi|^2 + \right. \\ \left. + (v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)) |\delta\psi|^2 + i (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) |\delta\psi|^2 + \right. \\ \left. + a_2 (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 + a_2 \psi_\delta \psi (\delta\bar{\psi})^2 \right) dx d\tau = \\ = - \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \psi \delta\bar{\psi} dx d\tau - i \int_{\Omega_t} \delta v_1(\tau) \psi \delta\bar{\psi} dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение и прибавляя к обеим частям полученного равенства слагаемое $\int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |\delta\psi|^2 dx d\tau$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial \tau} |\delta\psi|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) |\delta\psi|^2 \right) dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 dx d\tau = \\ = -2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} (\psi_\delta \psi (\delta\bar{\psi})^2) dx d\tau - 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} (\psi_\delta \psi (\delta\bar{\psi})^2) dx d\tau - \\ - 2 \int_{\Omega_t} (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) |\delta\psi|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \operatorname{Im} (\psi \delta\bar{\psi}) dx d\tau - \\ - 2 \int_{\Omega_t} \delta v_1(\tau) \operatorname{Re} (\psi \delta\bar{\psi}) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |\delta\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Второе слагаемое левой части этого равенства в силу граничных условий для $a_1(x, t)$ равняется к нулю. В этом случае преобразуя первое слагаемое и используя начальное условие из (4.3) получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^t |\delta\psi(x, \tau)|^2 dx + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 dx d\tau = \\ = -2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} (\psi_\delta \psi (\delta\bar{\psi})^2) dx d\tau - 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} (\psi_\delta \psi (\delta\bar{\psi})^2) dx d\tau - \\ - 2 \int_{\Omega_t} (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) |\delta\psi|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \operatorname{Im} (\psi \delta\bar{\psi}) dx d\tau - \\ - 2 \int_{\Omega_t} \delta v_1(\tau) \operatorname{Re} (\psi \delta\bar{\psi}) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |\delta\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Из этого равенства нетрудно установить следующее неравенство:

$$\int_0^t |\delta\psi(x, \tau)|^2 dx + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 dx d\tau \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} |\psi_\delta| |\psi| |\delta\psi|^2 + 2 \int_{\Omega_t} |v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)| |\delta\psi|^2 dx d\tau + \\ &+ 2 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)| |\psi| |\delta\psi| dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)| |\psi| |\delta\psi| dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| |\delta\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

В этом неравенстве используя условие для функций $v_1(t) + \delta v_1(t)$, $a_1(x, t)$ и неравенство $2|\psi_\delta||\psi| \leq |\psi_\delta|^2 + |\psi|^2$, а также условие (2.5) получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\int_0^t |\delta\psi(x, \tau)|^2 dx + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 dx d\tau \leq (2b_1 + \mu_5) \int_{\Omega_t} |\delta\psi|^2 dx d\tau + \\ &+ 2 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)| |\psi| |\delta\psi| dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)| |\psi| |\delta\psi| dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского в правой части этого неравенства имеем:

$$\begin{aligned} &\int_0^t |\delta\psi(x, \tau)|^2 dx + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 dx d\tau \leq \\ &\leq (2b_1 + \mu_5 + 2) \int_{\Omega_t} |\delta\psi|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)|^2 |\psi|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)|^2 |\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу оценки (3.1) получим справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} &\int_0^t |\delta\psi(x, \tau)|^2 dx + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 dx d\tau \leq \\ &+ (2b_1 + \mu_5 + 2) \int_0^t \|\delta\psi(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau + c_1 \left(\|\delta v_0\|_{L_\infty(0, T)}^2 + \|\delta v_1\|_{L_\infty(0, T)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В силу неотрицательности второго слагаемого левой части этого неравенства имеем:

$$\begin{aligned} &\int_0^t |\delta\psi(x, \tau)|^2 dx \leq \\ &+ (2b_1 + \mu_5 + 2) \int_0^t \|\delta\psi(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau + c_1 \left(\|\delta v_0\|_{L_\infty(0, T)}^2 + \|\delta v_1\|_{L_\infty(0, T)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Применяя в этом лемму Гронуолла получим справедливость оценки:

$$\|\delta\psi(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_2 \left(\|\delta v_0\|_{L_\infty(0, T)}^2 + \|\delta v_1\|_{L_\infty(0, T)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (4.5)$$

С учетом этой оценки из (4.4) получим справедливость следующей оценки:

$$\begin{aligned} &\|\delta\psi(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 dx d\tau \leq \\ &\leq c_3 \left(\|\delta v_0\|_{L_\infty(0, T)}^2 + \|\delta v_1\|_{L_\infty(0, T)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Теперь оценим $\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}$. С этой целью обе части уравнения (4.2) на функцию

$L\delta\bar{\psi} = -a_0 \frac{\partial^2 \delta\bar{\psi}}{\partial x^2} + a(x) \delta\bar{\psi}$ и проинтегрируем по области Ω_t . Тогда имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \delta\psi}{\partial t} L\delta\bar{\psi} - |L\delta\psi|^2 + i a_1(x, \tau) \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} L\delta\bar{\psi} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)) \delta \psi L \delta \bar{\psi} + i (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) \delta \psi L \delta \bar{\psi} dxd\tau + \\
 & + \int_{\Omega_t} a_2 (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \delta \psi L \delta \bar{\psi} dxd\tau + \int_{\Omega_t} a_2 \psi_\delta \psi \delta \bar{\psi} L \delta \bar{\psi} dxd\tau = \\
 & = - \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) \psi L \delta \bar{\psi} dxd\tau - i \int_{\Omega_t} \delta v_1(\tau) \psi L \delta \bar{\psi} dxd\tau, \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

Используя формулу для $L\delta\bar{\psi}$ и формулу интегрирования по частям имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_t} i \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} L \delta \bar{\psi} dxd\tau - \int_{\Omega_t} |L \delta \psi|^2 dxd\tau - i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) a_0 \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta \bar{\psi}}{\partial x^2} dxd\tau + \\
 & + i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) a(x) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \delta \bar{\psi} dxd\tau + \int_{\Omega_t} a_0 (v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dxd\tau + \\
 & + i \int_{\Omega_t} a_0 (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dxd\tau + \\
 & + \int_{\Omega_t} (v_0(\tau) + \delta v_0(\tau)) a(x) |\delta \psi|^2 dxd\tau + i \int_{\Omega_t} (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) a(x) |\delta \psi|^2 dxd\tau + \\
 & + \int_{\Omega_t} a_2 a_0 (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} a_2 a_0 (\psi_\delta \psi) \left(\frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right)^2 dxd\tau + \\
 & + \int_{\Omega_t} a_2 a_0 \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \bar{\psi}_\delta + \psi_\delta \frac{\partial \bar{\psi}_\delta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \delta \psi \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dxd\tau + \\
 & + \int_{\Omega_t} a_2 a_0 \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \psi + \psi_\delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \bar{\psi} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dxd\tau + \\
 & + \int_{\Omega_t} a_2 a(x) (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta \psi|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} a_2 a(x) \psi_\delta \psi (\delta \bar{\psi})^2 dxd\tau = \\
 & = - \int_{\Omega_t} \delta v_0(\tau) a_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} dxd\tau - i \int_{\Omega_t} \delta v_1(\tau) a_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} dxd\tau - \\
 & - \int_{\Omega_t} a(x) \delta v_0(\tau) \psi \delta \bar{\psi} dxd\tau - i \int_{\Omega_t} a(x) \delta v_1(\tau) \psi \delta \bar{\psi} dxd\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_t} i \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial t} L \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial t} L \delta \psi \right) dxd\tau - i \int_{\Omega_t} a_0 a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial x^2} \right) dxd\tau + \\
 & + i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) a(x) \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \delta \psi \right) dxd\tau + \\
 & + 2i \int_{\Omega_t} a_0 (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dxd\tau + 2i \int_{\Omega_t} (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) a(x) |\delta \psi|^2 dxd\tau + \\
 & + i 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dxd\tau + i 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left(\psi_\delta \psi \left(\frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right) dxd\tau +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left(\psi_\delta \psi \left(\frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right) dx d\tau + \\
& +i2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \bar{\psi}_\delta + \psi_\delta \frac{\partial \bar{\psi}_\delta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \delta \psi \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dx d\tau + \\
& +i2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \bar{\psi}_\delta + \psi_\delta \frac{\partial \bar{\psi}_\delta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \delta \psi \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dx d\tau + \\
& +i2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \psi + \psi_\delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \bar{\psi} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dx d\tau + \\
& +i2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \psi + \psi_\delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \bar{\psi} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dx d\tau + \\
& +i2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) \left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2 \right) |\delta \psi|^2 dx d\tau + i2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Re} \left(\psi_\delta \psi (\delta \bar{\psi})^2 \right) dx d\tau + \\
& +i2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im} \left(\psi_\delta \psi (\delta \bar{\psi})^2 \right) dx d\tau = \\
& = -2i \int_{\Omega_t} a_0 \delta v_0(\tau) \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right) dx d\tau - 2i \int_{\Omega_t} a_0 \delta v_1(\tau) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right) dx d\tau - \\
& -2i \int_{\Omega_t} a(x) \delta v_0(\tau) \operatorname{Im} (\psi \delta \bar{\psi}) dx d\tau - 2i \int_{\Omega_t} a(x) \delta v_1(\tau) \operatorname{Re} (\psi \delta \bar{\psi}) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое левой части этого равенства можем преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial t} L \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial t} L \delta \psi \right) dx d\tau = \\
& = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(a_0 \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(a(x) |\delta \psi|^2 \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Здесь учитывая начальное условие из (4.3) и условие, что $\frac{\partial \delta \psi(x, 0)}{\partial x} = 0, \forall x \in (0, l)$ получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial t} L \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial t} L \delta \psi \right) dx d\tau = \\
& = \int_0^l a_0 \left| \frac{\partial \delta \psi(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx + \int_0^l a(x) |\delta \psi(x, t)|^2 dx, \forall t \in [0, T]. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

С другой стороны второе слагаемое левой части равенства (4.7) можем написать в виде:

$$\begin{aligned}
& i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) a_0 \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial x^2} \right) dx d\tau = i \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 \right) dx d\tau - \\
& - i \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Учитывая это равенство и равенство (4.8) в левой части равенства (4.7) имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l a_0 \left| \frac{\partial \delta \psi(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx + \int_0^l a(x) |\delta \psi(x, t)|^2 dx - \\
& - \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 \right) dx d\tau - \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\
& + 2 \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) a(x) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \delta \bar{\psi} \right) dx d\tau + \\
& + 2 \int_{\Omega_t} a_0 (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} (v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)) a(x) |\delta \psi|^2 dx d\tau + \\
& + 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left(\psi_\delta \psi \left(\frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right) dx d\tau + \\
& + 2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left(\psi_\delta \psi \left(\frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right) dx d\tau + \\
& + 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \bar{\psi}_\delta + \psi_\delta \frac{\partial \bar{\psi}_\delta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \delta \psi \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dx d\tau + \\
& + 2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \bar{\psi}_\delta + \psi_\delta \frac{\partial \bar{\psi}_\delta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \bar{\psi} + \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) \delta \psi \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dx d\tau + \\
& + 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \psi + \psi_\delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \bar{\psi} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dx d\tau + \\
& + 2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \psi + \psi_\delta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta \bar{\psi} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right] dx d\tau + \\
& + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta \psi|^2 dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Re} (\psi_\delta \psi (\delta \bar{\psi})^2) dx d\tau + \\
& + 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im} (\psi_\delta \psi (\delta \bar{\psi})^2) dx d\tau = \\
& = -2 \int_{\Omega_t} a_0 \delta v_0(\tau) \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right) dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} a_0 \delta v_1(\tau) \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial x} \right) dx d\tau - \\
& - 2 \int_{\Omega_t} a(x) \delta v_0(\tau) \operatorname{Im} (\psi \delta \bar{\psi}) dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} a(x) \delta v_1(\tau) \operatorname{Re} (\psi \delta \bar{\psi}) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

В силу краевых условий (4.3) третье слагаемое левой части этого равенства равняется нулю. Поэтому из этого равенства нетрудно установить справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned}
& a_0 \int_0^l \left| \frac{\partial \delta \psi(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx + \int_0^l a(x) |\delta \psi(x, t)|^2 dx + 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\
& + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta \psi|^2 dx d\tau \leq a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \int_{\Omega_t} a(x) |a_1(x, \tau)| |\delta\psi| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + 2a_0 \int_{\Omega_t} |v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\
& +2 \int_{\Omega_t} a(x) |v_1(\tau) + \delta v_1(\tau)| |\delta\psi|^2 dx d\tau + 2a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} |\psi_\delta| |\psi| \left| \frac{\partial \delta\bar{\psi}}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\
& +4a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left(\left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right| |\psi_\delta| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| |\psi| \right) |\delta\psi| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + \\
& +2a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left(\left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right| |\psi| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| |\psi_\delta| \right) |\delta\psi| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + \\
& +2 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} a(x) |\psi_\delta| |\psi| |\delta\psi|^2 dx d\tau + \\
& +2a_0 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)| \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + 2a_0 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)| \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + \\
& +2 \int_{\Omega_t} a(x) |\delta v_0(\tau)| |\psi| |\delta\psi| dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} a(x) |\delta v_1(\tau)| |\psi| |\delta\psi| dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Используя условие (2.5) и условия на коэффициенты уравнения, а также неравенство $2|\psi_\delta||\psi| \leq |\psi_\delta|^2 + |\psi|^2$, из последнего неравенства имеем:

$$\begin{aligned}
& a_0 \int_0^t \left| \frac{\partial \delta\psi(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx + \mu_0 \int_0^t |\delta\psi(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta\psi|^2 dx d\tau \leq (\mu_5 a_0 + 2a_0 b_1) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\
& + 2\mu_4 \mu_1 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| |\delta\psi| dx d\tau + 2\mu_1 b_1 \int_{\Omega_t} |\delta\psi|^2 dx d\tau + \\
& + 4a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left(\left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right| |\psi_\delta| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| |\psi| \right) |\delta\psi| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + \\
& + 2a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left(\left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right| |\psi| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| |\psi_\delta| \right) |\delta\psi| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + \\
& + 2a_0 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)| \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + 2a_0 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)| \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau + \\
& + 2\mu_1 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)| |\psi| |\delta\psi| dx d\tau + 2\mu_1 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)| |\psi| |\delta\psi| dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Теперь оценим третье и четвертое слагаемые правой части этого неравенства. По формуле третьего и третьего слагаемых и неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$\begin{aligned}
& 4a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left(\left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right| |\psi_\delta| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| |\psi| \right) |\delta\psi| \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right| dx d\tau \leq \\
& \leq 2a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left[\left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right|^2 |\delta\psi|^2 + |\psi_\delta|^2 \left| \frac{\partial \delta\psi}{\partial x} \right|^2 \right] dx d\tau +
\end{aligned}$$

$$+2a_0(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 |\delta \psi|^2 + |\psi|^2 \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 \right] dx d\tau, \forall t \in [0, T], \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & 2a_0(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left(\left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right| |\psi| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| |\psi_\delta| \right) |\delta \psi| \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right| dx d\tau \leq \\ & \leq a_0(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left[\left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right|^2 |\delta \psi|^2 + |\psi|^2 \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 \right] dx d\tau + \\ & + a_0(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left[\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 |\delta \psi|^2 + |\psi_\delta|^2 \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 \right] dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

С помощью этих неравенств и неравенства Коши-Буняковского из неравенства (4.11) получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & a_0 \int_0^l \left| \frac{\partial \delta \psi(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx + \mu_0 \int_0^l |\delta \psi(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta \psi|^2 dx d\tau \leq (\mu_5 a_0 + 2a_0 b_1 + \mu_4 \mu_1 + 2a_0) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\ & + (\mu_4 \mu_1 + 2\mu_1 b_1 + 2\mu_1) \int_{\Omega_t} |\delta \psi|^2 dx d\tau + \\ & + 3a_0(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right|^2 |\delta \psi|^2 dx d\tau + 3a_0(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} |\psi_\delta|^2 \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\ & + 3a_0(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 |\delta \psi|^2 dx d\tau + 3a_0(\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} |\psi|^2 \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\ & + a_0 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)|^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + a_0 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)|^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\ & + \mu_1 \int_{\Omega_t} |\delta v_0(\tau)|^2 |\psi|^2 dx d\tau + \mu_1 \int_{\Omega_t} |\delta v_1(\tau)|^2 |\psi|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ввиду того, что $\psi, \psi_\delta \in W_2^{2,1}(\Omega)$ и пространство $W_2^{2,1}(\Omega)$ вложено в пространство $L_\infty(0, T; W_2^1(0, l))$, а пространство $W_2^1(0, l)$ вложено в пространство $L_\infty(0, l)$ с помощью оценки (3.1) и ее аналога для ψ_δ нетрудно установить справедливость неравенств:

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_4, \|\psi_\delta\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_4. \quad (4.15)$$

С другой стороны ввиду того, $\psi, \psi_\delta \in W_2^{2,1}(\Omega)$ и пространство $W_2^{2,1}(\Omega)$ вложено в пространство $L_2(0, T; W_2^2(0, l))$, из соотношений $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \in L_2(0, T; L_\infty(0, l))$ можем установить справедливость следующих неравенств:

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{L_2(0, T; L_\infty(0, l))} \leq c_5 \|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}, \left\| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right\|_{L_2(0, T; L_\infty(0, l))} \leq c_5 \|\psi_\delta\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}.$$

Отсюда с помощью оценки (3.1) и ее аналога для ψ_δ имеем:

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,I))} \leq c_6, \left\| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x} \right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,I))} \leq c_6. \quad (4.16)$$

В силу оценок (3.1), (4.6) и неравенств (4.15), (4.16) из неравенства (4.14) получим справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} a_0 \left\| \frac{\partial \delta \psi(\cdot, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 + \mu_0 \left\| \delta \psi(\cdot, t) \right\|_{L_2(0,I)}^2 + \frac{1}{2} a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) \left| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\ + \frac{1}{2} \mu_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2) |\delta \psi|^2 dx d\tau \leq \\ \leq c_7 \left(\left\| \delta v_0 \right\|_{L_\infty(0,T)}^2 + \left\| \delta v_1 \right\|_{L_\infty(0,T)}^2 \right) + c_8 \int_0^t \left\| \frac{\partial \delta \psi(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В силу неотрицательности второго, третьего и четвертого слагаемых из этого неравенства имеем:

$$a_0 \left\| \frac{\partial \delta \psi(\cdot, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 \leq c_7 \left(\left\| \delta v_0 \right\|_{L_\infty(0,T)}^2 + \left\| \delta v_1 \right\|_{L_\infty(0,T)}^2 \right) + c_8 \int_0^t \left\| \frac{\partial \delta \psi(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Из этого неравенства с делением на a_0 и с применением неравенство Гронуолла имеем:

$$\left\| \frac{\partial \delta \psi(\cdot, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 \leq c_9 \left(\left\| \delta v_0 \right\|_{L_\infty(0,T)}^2 + \left\| \delta v_1 \right\|_{L_\infty(0,T)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (4.18)$$

Используя эту оценку и оценку (4.5) установим справедливость оценки:

$$\left\| \delta \psi(\cdot, t) \right\|_{L_2(0,I)}^2 + \left\| \frac{\partial \delta \psi(\cdot, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 \leq c_{10} \left\| \delta v \right\|_B^2, \forall t \in [0, T]. \quad (4.19)$$

Интегрируя обе части этого неравенства по $t \in [0, T]$ имеем:

$$\left\| \delta \psi \right\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \leq c_{10} \left\| \delta v \right\|_B^2. \quad (4.20)$$

С помощью теоремы о следах (см. [40], стр. 170) получим справедливость оценки:

$$\left\| \delta \psi(0, \cdot) \right\|_{L_2(0,T)}^2 + \left\| \delta \psi(l, \cdot) \right\|_{L_2(0,T)}^2 \leq c_{11} \left\| \delta v \right\|_B^2. \quad (4.21)$$

Постоянные $c_8 > 0, c_9 > 0, c_{10} > 0, c_{11} > 0$ в оценках (4.18)-(4.21) не зависят от δv .

Теперь рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$ на любом элементе $v \in V$. С помощью формулы (4.1) имеем:

$$\begin{aligned} \delta J_0(v) = J_0(v + \delta v) - J_0(v) = 2\beta_0 \int_0^T \operatorname{Re}[(\psi(0, t) - y_0(t)) \delta \bar{\psi}(0, t)] dt + \\ + 2\beta_1 \int_0^T \operatorname{Re}[(\psi(l, t) - y_1(t)) \delta \bar{\psi}(l, t)] dt + \beta_0 \left\| \delta \psi(0, \cdot) \right\|_{L_2(0,T)}^2 + \beta_1 \left\| \delta \psi(l, \cdot) \right\|_{L_2(0,T)}^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Используя оценку (3.1) нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\left\| \psi(0, \cdot) \right\|_{L_2(0,T)}^2 + \left\| \psi(l, \cdot) \right\|_{L_2(0,T)}^2 \leq c_{12}. \quad (4.23)$$

Из формулы (4.22) применяя неравенство Коши-Буняковского и используя оценку (4.21), а также неравенство (4.23) получим справедливость неравенства:

$$|\delta J_0(v)| \leq c_{13} \left(\left\| \delta v \right\|_B + \left\| \delta v \right\|_B^2 \right), \forall v \in V. \quad (4.24)$$

Из этого неравенства следует непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V . Множество V является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством пространства $B = L_\infty(0, T) \times L_\infty(0, T)$. Нетрудно доказать, что оно является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством равномерного выпуклого пространства $H = L_2(0, T) \times L_2(0, T)$ [41]. Тогда в силу сформулированного выше утверждения невыпуклой оптимизации из работы существует плотное подмножество G из пространства H такое, что при любом $\omega \in G$ и при любом $\alpha > 0$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет единственное решение. Теорема 4.1 доказана [39].

Теперь докажем теорему о существовании решения задачи оптимального управления (2.1)-(2.4) при $\alpha \geq 0$.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда при любом $\alpha \geq 0$ и любом $\omega \in H$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Возьмем любую минимизирующую последовательность $\{v^k\} \subset V$: $\lim_{k \rightarrow \infty} J_\alpha(v^k) = J_{\alpha^*} = \inf_{v \in V} J_\alpha(v)$. Положим $\psi_k = \psi_k(x, t) \equiv \psi(x, t; v^k)$, $k = 1, 2, \dots$. В силу теоремы 3.1 при каждом $v^k \in V$ редуцированная задача (2.2)-(2.4) имеет единственное решение $\psi_k(x, z)$ из пространства B_1 и для этого решения верна оценка:

$$\|\psi_k\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), k = 1, 2, \dots, \quad (4.25)$$

где правая часть оценки не зависит от k .

Поскольку множество V есть ограниченное множество банахова пространства $B = L_\infty(0, T) \times L_\infty(0, T)$, то из последовательности $\{v^k\} \subset V$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{v^{k_p}\}$, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{v^k\}$, что

$$v_s^k \rightarrow v_s, s = 0, 1 \quad (*) \text{ слабо в } L_\infty(0, T), \quad (4.26)$$

при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, V является замкнутым выпуклым множеством из B . Поэтому V есть $(*)$ слабо замкнутое множество, то есть $v \in V$.

Из оценки (4.25) следует, что последовательность $\{\psi_k(x, t)\}$ равномерно ограничена в норме пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$. Тогда из этой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность $\{\psi_{k_p}(x, t)\}$, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{\psi_k(x, t)\}$, что

$$\psi_k \rightarrow \psi \text{ слабо в } L_2(\Omega); \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(\Omega); \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ слабо в } L_2(\Omega); \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(\Omega) \quad (4.30)$$

при $k \rightarrow \infty$.

Ясно, что каждый элемент $\{\psi_k(x, t)\}$ из $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет тождеству:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi_k}{\partial x} - a(x) \psi_k + \right.$$

$$+v_0^k(t)\psi_k + iv_0^k(t)\psi_k + a_2|\psi_k|^2\psi_k - f(x,t))\bar{\eta}(x,t)dxdt, k=1,2,\dots \quad (4.31)$$

для любой функции $\eta = \eta(x, t)$ из $L_2(\Omega)$, начальному условию:

$$\psi_k(x, 0) = \varphi(x), \quad \forall x \in (0, l), k=1,2,\dots \quad (4.32)$$

и краевым условиям:

$$\frac{\partial \psi_k(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_k(l, t)}{\partial x} = 0, \quad \forall t \in (0, T), k=1,2,\dots \quad (4.33)$$

В силу компактности вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и силу предельных соотношений (4.21)-(4.24) имеем:

$$\|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (4.34)$$

при $k \rightarrow \infty$. Используя это и предельное соотношение (4.20) можем установить справедливость соотношений:

$$\int_{\Omega} v_s^k(t)\psi_k(x, t)\bar{\eta}(x, t)dxdt \rightarrow \int_{\Omega} v_s(t)\psi(x, t)\bar{\eta}(x, t)dxdt, s=0,1, \quad (4.35)$$

для любой функции $\eta \in L_2(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$. Действительно, можем написать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_s^k(t)\psi_k(x, t)\bar{\eta}(x, t)dxdt &= \int_{\Omega} v_s^k(t)(\psi_k(x, t) - \psi(x, t))\bar{\eta}(x, t)dxdt + \\ &+ \int_{\Omega} (v_s^k(t) - v_s(t))\psi(x, t)\bar{\eta}(x, t)dxdt + \int_{\Omega} v_s(t)\psi(x, t)\bar{\eta}(x, t)dxdt, s=0,1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Сначала рассмотрим первое слагаемое правой части этого равенства:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} v_s^k(t)(\psi_k(x, t) - \psi(x, t))\bar{\eta}(x, t)dxdt \right| &\leq \int_{\Omega} |v_s^k(t)| |\psi_k(x, t) - \psi(x, t)| |\eta(x, t)| dxdt \leq \\ &\leq \|v_s^k\|_{L_{\infty}(0, T)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)} \leq b_s \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \|\psi_k - \psi\|_{L_2(\Omega)}, s=0,1, \forall \eta \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (4.37)$$

С учетом предельного соотношения (4.34) если переходить к пределу в обеих частях этих неравенств при $k \rightarrow \infty$ получим справедливость предельных соотношений:

$$\int_{\Omega} v_s^k(t)(\psi_k(x, t) - \psi(x, t))\bar{\eta}(x, t)dxdt \rightarrow 0, s=0,1, \forall \eta \in L_2(\Omega). \quad (4.38)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое правой части равенства (4.36). Ясно, что функция $g(t) = \int_0^l \psi(x, t)\bar{\eta}(x, t)dx$ принадлежит пространству $L_1(0, T)$. Действительно,

из условий $\psi \in L_2(\Omega), \eta \in L_2(\Omega)$ и неравенства Коши-Буняковского получим:

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_1(0, T)} &= \int_0^T |g(t)| dt = \int_0^T \left| \int_0^l \psi(x, t)\bar{\eta}(x, t)dx \right| dt \leq \int_0^T \int_0^l |\psi(x, t)\bar{\eta}(x, t)| dxdt \leq \\ &\leq \|\psi\|_{L_2(\Omega)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} < +\infty. \end{aligned}$$

С учетом этого и предельных соотношений (4.26) нетрудно получить справедливость следующих предельных соотношений:

$$\int_{\Omega} (v_s^k(t) - v_s(t))\psi(x, t)\bar{\eta}(x, t)dxdt \rightarrow 0, s=0,1, \forall \eta \in L_2(\Omega) \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (4.39)$$

С помощью предельных соотношений (4.38), (4.39) и если переходить к пределу в обеих частях равенств (4.36), то отсюда получим справедливость предельных соотношений (4.35).

Теперь докажем следующее предельное соотношение:

$$\int_{\Omega} a_2 |\psi_k(x, t)|^2 \psi_k(x, t) \bar{\eta}(x, t) dx dt \rightarrow \int_{\Omega} a_2 |\psi(x, t)|^2 \psi(x, t) \bar{\eta}(x, t) dx dt. \quad (4.40)$$

для любой функции $\eta = \eta(x, t)$ из $L_2(\Omega)$. В силу предельного соотношения (4.34) из последовательности $\{\psi_k(x, t)\}$ можно выделить подпоследовательность, которую для общности будем снова обозначить через $\{\psi_k(x, t)\}$, будет сходиться почти всюду в Ω , то есть имеет место следующее предельное соотношение:

$$\psi_k(x, t) \rightarrow \psi(x, t) \text{ для почти всех } (x, t) \in \Omega. \quad (4.41)$$

С другой стороны, в силу вложений пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))$ и пространства $W_2^1(0, l)$ в пространство $L_{\infty}(0, l)$, а также оценки (4.25) нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} \left\| a_2 |\psi_k(x, t)|^2 \psi_k(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} \left| a_2 |\psi_k(x, t)|^2 \psi_k(x, t) \right|^2 dx dt \leq |a_2|^2 \int_{\Omega} |\psi_k(x, t)|^6 dx dt \leq \\ &\leq T l |a_2|^2 \|\psi_k\|_{L_{\infty}(\Omega)}^6 \leq c_{14} \|\psi_k\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))}^6 \leq c_{15} \|\psi_k\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^6 \leq c_{16}, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.42)$$

Здесь постоянная c_{45} не зависит от k . Тогда из соотношений (4.41), (4.42) в силу леммы, известной из работы [25, с.530-531] получим справедливость предельного соотношения (4.40).

Таким образом, используя предельные соотношения (4.27)-(4.30), (4.35), (4.40) если переходить к пределу в интегральном тождестве (4.31), то при $k \rightarrow \infty$ получим справедливость следующего интегрального тождества:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + \right. \\ \left. + v_0(t) \psi + i v_1(t) \psi + a_2 |\psi|^2 \psi - f(x, t) \right) \bar{\eta}(x, t) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

для любой функции $\eta = \eta(x, t)$ из $L_2(\Omega)$. Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x, t)$ для почти всех $(x, t) \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (2.2).

В силу компактного вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $C^0([0, T], L_2(0, l))$ можем написать следующее предельное соотношение:

$$\|\psi_k(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0 \quad (4.44)$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$ при $k \rightarrow \infty$.

Удовлетворение начального условия следует из предельного соотношения (4.44) при $t = 0$, начального условия (4.32) и из следующего неравенства:

$$\|\psi(\cdot, 0) - \phi\|_{L_2(0, l)} \leq \|\psi(\cdot, 0) - \psi_k(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)} + \|\psi_k(\cdot, 0) - \phi\|_{L_2(0, l)}.$$

Действительно, если с учетом предельного соотношения (4.44) при $t = 0$ и условия (4.32) если переходить к пределу в обеих частях этого неравенства, то при $k \rightarrow \infty$ получим справедливость соотношения:

$$\|\psi(\cdot, 0) - \phi\|_{L_2(0, l)} = 0.$$

Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x, t)$ начальному условию (2.3) для почти всех $x \in (0, l)$.

Наконец, докажем, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет вторым краевым условиям (2.4). Действительно, в силу леммы 3.4 работы [25, с.98] и условия, что подпоследовательность $\{\psi_k(x, t)\}$ принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$, можем утверждать справедливость предельных соотношений:

$$\frac{\partial \psi_k(s, t)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x}, s=0, l \text{ слабо в } L_2(0, T) \quad (4.45)$$

при $k \rightarrow \infty$. Тогда, используя эти предельные соотношения и краевые условия (4.33), из равенств:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k(s, t)}{\partial x} \right) \bar{\eta}(t) dt + \int_0^T \frac{\partial \psi_k(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt, s=0, l$$

с переходом к пределу получим справедливость краевых условий:

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0, T).$$

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x, t)$ является решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4), соответствующим предельной функции $v \in V$, то есть $\psi = \psi(x, t) \equiv \psi(x, t; v)$. Кроме того, для этой функции справедлива оценка (3.1), которая непосредственно следует из оценки (4.25) с переходом к пределу по слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi_k(x, t)\}$. В силу теоремы 3.1 такое решение единственно принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$. Используя слабую полунепрерывность снизу нормы пространств $L_2(0, T), H$, а также предельные соотношения: $v_s^k \rightarrow v_s, m=0, 1$ слабо в $L_2(0, T)$, $\psi_k(s, \cdot) \rightarrow \psi(s, \cdot), s=0, l$ сильно в $L_2(0, T)$ при $k \rightarrow \infty$ для $\forall \alpha \geq 0$ и $\forall \omega \in H$ имеем:

$$J_{\alpha^*} \leq J_{\alpha}(v) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J_{\alpha}(v^k) = \inf_{v \in V} J_{\alpha}(v) = J_{\alpha^*}.$$

Отсюда следует, что $v \in V$ является решением задачи оптимального управления (2.1)-(2.4) при $\alpha \geq 0$ и $\forall \omega \in H$. Теорема 4.2 доказана.

Литература

1. Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. (1984). Управление квантовомеханическими процессами. М: Наука, 256 с.
2. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. (1985). Принципы адаптивной оптики. М: Наука, 366 с.
3. Журавлев В.М. (2001). Нелинейные волны в много компонентных системах с дисперсией и диффузией. Ульяновск, УлГУ, 200 с.
4. Akbaba G.D. (2011). The optimal control problem with the Lions functional for the Schredinger equation including virtual coefficient gradient. Master's thesis, Kars, 71 pp. (in Turkish).
5. Yagubov G., Toyoglu F., Subasi M. (2012). An optimal control problem for two-dimensional Schredinger equation // Applied Mathematics and Computation, vol. 218, iss.11, pp.6177-6187.
6. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. (1988). Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // Докл. АН СССР, т. 303, № 5, с. 1044-1048.
7. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. (1989). Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами // Автоматика и телемехан., № 12, с. 27-38.

8. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. (1997). Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения, т.33, № 12, с. 1691-1698.
9. Baudouin L., Kavian O., Puel J.P. (2005). Regularity for a Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control // J. Differential Equations, 216, p. 188-222.
10. Искендеров А., Ягубов Г. (2007). Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. Естественных наук, Ленкорань, с. 3-56.
11. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. (2012). Идентификация квантовых потенциалов. Баку, Чашыюглу, 548 с.
12. Ibrahimov N.S. (2010). On the existence of a solution to the identification problem based on the final observation for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation. Nauchnye Trudy, Azerb. Tech. Univ., Ser. Fundamental Sciences, No.2, pp.75-83. (in Russian)
13. Ibrahimov N.S. (2011). On one identification problem for a one-dimensional nonlinear stationary quasi-optic equation. Tavricheskiy Vestnik Informatiki i Matematiki, No.2, pp.17-29. (in Russian)
14. Ibrahimov N.S. (2012). The identification problem based on the final. observation for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. Problems of Control and Informatics, No.4, pp.15-27. (in Russian)
15. Paşayev A.M., İskenderov A.D., Yagubov G.Y. Musaeva M.A. (2020). Variation method solving of the inverse problems for Schrödinger-type equation // J. Inverse Ill Posed Probl., doi.org/10.1515/jiip-2020-0095, 12 pp.
16. Iskenderov A.D., Yagub G., Y. Aksoy N. (2015). An optimal control problem for a two-dimensional nonlinear Schredinger reequation with a spesial gradient terms// Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, pp.27-28.
17. Iskenderov A.D., Yagub G., Zengin M. (2016). Optimal control problem for nonlinear Schredinger equation with spesial gradient terms. Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, pp.79-80.
18. Ягуб Г., Ибрагимов Н., Мусаева М., Зенгин М. (2017). Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантового потенциала в нелинейном нестационарном уравнении Шредингера с комплексным коэффициентом в нелинейной части // Вестник Ленкоранского Государственного Университета, Естественные науки, серия 2, с. 7-30.
19. Искендеров А.Д., Ягуб.Г., Салманов В., Акцой Н.Й. (2019). Задача оптимального управления для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и техн. наук, № 4 (101), с. 32-44.
20. M. Zengin, N.S. Ibrahimov, G. Yagub. (2021). Existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem with boundary functional for nonlinear stationary quasi-optical equation with a special gradient term // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Naturl sciences series, № 1, pp.27-42.
21. G. Yakub, N.S. Ibrahimov, M. Zengin. (2021). Optimal control problem for the stationary quasi- optics equation with a special gradient term // Advanced Mathematical Models and Applications, Vol. 6, № 3, pp. 252-265.
22. Şayir A. (2024). Optimal control problem with final kriterion for a Schrödinger equation with a special gradient term and a time-dependent complex potential. M. Sc Thesis, Kars, 40 p.

23. Artaç F.C. (2025). Optimal control problem with final criterion for a nonlinear Schredinger equation with a special gradient term and a time-dependent complex potential. M. Sc Thesis, Kars, 52 p.
24. Ладыженская О.А. (1973). Краевые задачи математической физики. М: Наука, 408 с.
25. Ладыженская О.А. (1967). Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М: Наука, 736 с.
26. Lions J.-L., Magenes E. (1972). Non-homogeneous boundary value problems and applications - vol. 2. Berlin, 307 p.
27. Ibrahimov N.S. (2010). Solvability of initial-boundary value problems for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. News of Baku State University, Ser. Phys. Math. Sciences, No.3, pp.72-84. (in Russian).
28. Ibrahimov N.S. (2010). Solvability of initial-boundary value problems for a linear stationary equation of quasi-optics. International Journal of Caucasian University "Mathematics and Informatics", Vol.1, No.29, pp.61-70. (in Russian).
29. Yagub G., Ibrahimov N.S., Zengin M. (2015). Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schredinger equation with a special gradient terms // Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, pp.53-54.
30. Yagub G., Ibrahimov N.S., Aksoy N.Y. (2016). On the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with special gradient terms // Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, pp.170-171.
31. Ягубов Г., Салманов В., Ягубов В., Зенгин М. (2017). Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук, № 4 (85), с. 7-21.
32. G. Yagub, N.S. Ibrahimov., M. Zengin. (2018). The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schredinger equation with a special gradient term // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, № 2, pp. 214-232.
33. А. Искендеров, Г. Ягуб, В. Салманов. (2018). Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук, № 4 (93), с. 28-43.
34. Yagub G, Ibrahimov N, Suleymanov N. (2022). The second initial-boundary value problem for a linear one-dimensional Schredinger equation with a special gradient term and time dependent measurable boundary complex potential // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Natural sciences series, 1, pp. 13-30 (in Russian)
35. Ibrahimov N.S., Yagub G., Ülker T. (2025). The second initial-boundary value problem for a nonlinear one-dimensional nonstationary Schredinger equation with a special gradient term and with a measurable limited complex potential that depends only on time // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Natural sciences series, 1, pp. 27-50 (in Russian)
36. Понтрягин Л.С. (1982). Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 332 с.
37. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. (1979). Оптимальное управление. М.: Наука, 430 с.
38. Васильев Ф.П. (1980). Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 518 с.

39. Goebel M. (1979). On existence of optimal control // Math. Nachr., vol. 93, p. 67-73.
40. Михайлов В.П. (1983). Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 424 с.
41. Иосида К. (1967). Функциональный анализ. М.: Мир, 624 с.

ON THE EXISTENCE OF A SOLUTION TO THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH A BOUNDARY FUNCTIONAL FOR A NONLINEAR NONSTATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION WITH A SPECIAL GRADIENT TERM

Gabil Yagub

Natig Ibrahimov

Tuba Ulker

Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

Kars Kafkas University, Kars, Turkey

In this work, the problem of optimal control is considered for a nonlinear non-stationary one-dimensional Schrödinger equation with a special gradient term and a complex potential, when the quality criterion is an integral over the boundary of the domain, and the role of control is played by the bounded measurable coefficients of the equation, i.e., the real and imaginary parts of the complex potential, which depend only on the time variable. The existence and uniqueness theorems for the solution of the considered optimal control problem are proved.

Keywords: nonlinear schrödinger equation, optimal control problem, gradient term, complex potential

XÜSUSİ QRADİENT HƏDLİ QEYRİ-XƏTTİ QEYRİ-STASİONAR ŞREDİNGER TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏRHƏD FUNKSİONALLI OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN VARLIĞI HAQQINDA

Qabil Yaqub

Natig İbrahimov

Tuba Ülkər

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

Qars Qafqaz Universiteti, Qars, Türkiyə

Bu işdə keyfiyyət kriteri sərhəd funksionalı olan xüsusi qradient hədlı və kompleks potensiallı qeyri-xətti qeyri-stasionar bir ölçülü Şredinger tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Burada idarəetmələr rolunu tənliyin məhdud ölçülən əmsalları, başqa sözlə, zaman dəyişənindən asılı kompleks potensialın həqiqi və xəyali hissələri oynayır. Bununla baxılan optimal idarəetmə məsələsinin həllinin varlığı və təkliyi üçün teoremlər isbat edilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-xətti şredinger tənliyi, optimal idarəetmə məsələsi, qradient hədd, kompleks potensial

Daxil oldu: 08.07.2025

Çap edildi: 15.12.2025



Elmi xəbərlər jurnalı Lənkəran Dövlət Universitetinin
mətbəəsində çap olunmuşdur

Yığıma verilmişdir: 08.07.2025
Çapa imzalanmışdır: 15.12.2025

Kağızın formatı: $60 \times 84^{\frac{1}{8}}$
Çap vərəqi: 6.25 c.v., tiraj: 100

Ünvan: Az 4200, Lənkəran şəhəri, General Həzi Aslanov xiyabanı 50
e-mail: elmi_meqale@lsu.edu.az
www.lsu.edu.az